RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 3 giugno 1917.

A. Ròiti, Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sopra una proprietà caratteristica delle superficie della classe* $K = -\frac{1}{\{\varphi(\alpha)+\psi(\beta)\}^2}$. Nota del Socio Luigi Bianchi.

1, Le superficie a curvature opposte per le quali la curvatura totale K, espressa pei parametri α, β delle linee asintotiche, assume la forma

$$\text{A)} \qquad K = -\frac{1}{\{\varphi(\alpha)+\psi(\beta)\}^2}$$

si presentano, come è noto, in diverse questioni di geometria (1). Ciascuna superficie S di questa classe appartiene, come prima falda focale, ad una doppia infinità congruenze rettilinee W, la cui seconda falda S′ ha in ogni punto la stessa curvatura come la S nel punto corrispondente, ed appartiene alla medesima classe A). Ne scaturiscono per le superficie della classe A) dei *metodi di trasformazione*, che si riducono a quelli delle superficie pseudosferiche quando in particolare $\varphi(\alpha)$ e $\psi(\beta)$ si riducono a costanti. Mi propongo di mostrare in questa Nota che l'esistenza di queste trasformazioni basta già a caratterizzare le superficie della classe A). Per questo partiamo da un problema di *ordinamento di faccette piane*, al quale arriviamo nel modo seguente.

(1) Cfr. la mia Memoria del 1890: *Sopra alcune nuove classi di superficie e di sistemi tripli ortogonali* (Annali di matematica, ser. 2ª, tomo XVIII). Ved. anche il volume 2° delle mie *Lezioni di geometria differenziale*, §§ 249-252.

Data una superficie S, descriviamo attorno ad ogni suo punto P come centro, e nel relativo piano tangente π, un circolo C di raggio R variabile con P. Facciamo poi corrispondere a ciascuna faccetta $f \equiv (\pi, P)$ di S, costituita da un piano π tangente di S e dal suo punto P di contatto, una semplice infinità di faccette $f' \equiv (\pi', P')$ trasformate, i cui centri P' siano allogati sulla circonferenza C e i cui piani π' passino pel centro P di f, e siano inclinati sul suo piano π di un medesimo angolo σ (che sarà variabile in generale col punto P di contatto).

Domandiamo allora: *Come deve assumersi la superficie* S, *e quale deve essere la legge di variabilità pel raggio* R *e per l'angolo* σ, *affinchè le* ∞^3 *faccette trasformate* f' *si distribuiscano in* ∞^1 *superficie* S' (*trasformate di* S)?

Si vedrà che il problema così enunciato ammette soluzioni allora ed allora soltanto che la S sia a curvature opposte ed appartenga alla classe A), e in tal caso, fissata S, ammette ∞^1 soluzioni, restando una costante arbitraria nelle equazioni di R e σ. Ogni volta poi le superficie trasformate S' sono ancora della classe A), e coincidono appunto con quelle a cui conducono gli indicati metodi di trasformazione.

2. Riferiamo la superficie data S ad un sistema coordinato curvilineo (u, v), che supporremo per semplicità *ortogonale* ma del resto qualunque, e si abbia nelle usuali notazioni (ved. *Lezioni* ecc., vol. II, § 254):

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial x}{\partial u} = \sqrt{E}\, X_1\,, \quad \frac{\partial X_1}{\partial u} = -\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} X_2 + \frac{D}{\sqrt{E}} X_3\,,\\
&\quad \frac{\partial X_2}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} X_1 + \frac{D'}{\sqrt{G}} X_3\,, \quad \frac{\partial X_3}{\partial u} = -\frac{D}{\sqrt{E}} X_1 - \frac{D'}{\sqrt{G}} X_2\\
&\frac{\partial x}{\partial v} = \sqrt{G}\, X_2\,, \quad \frac{\partial X_1}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} X_2 + \frac{D'}{\sqrt{E}} X_3\,,\\
&\quad \frac{\partial X_2}{\partial v} = -\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} X_1 + \frac{D''}{\sqrt{G}} X_3\,, \quad \frac{\partial X_3}{\partial v} = -\frac{D'}{\sqrt{E}} X_1 - \frac{D''}{\sqrt{G}} X_2\,.
\end{aligned}\right.$$

Scriviamo inoltre le relative equazioni di Codazzi

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{D}{\sqrt{E}}\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{D'}{\sqrt{E}}\right) = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}\frac{D'}{\sqrt{G}} + \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}\cdot\frac{D''}{\sqrt{G}}\\
&\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{D''}{\sqrt{G}}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{D'}{\sqrt{G}}\right) = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}\frac{D}{\sqrt{E}} + \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}\cdot\frac{D'}{\sqrt{E}}\,,
\end{aligned}\right.$$

e l'equazione di Gauss

$$(3)\qquad \frac{DD'' - D'^2}{EG} = K\,,$$

dove K indica la curvatura totale di Gauss:

$$(3^*)\qquad K = -\frac{1}{\sqrt{EG}}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right)\right\}.$$

Ora, attorno ad ogni punto $P\equiv(u,v)$ di S come centro e nel piano tangente π, descriviamo un cerchio di raggio R, dove R è da pensarsi come una funzione *data* di u, v, sia $R = R(u, v)$. Le coordinate x', y', z' di ogni punto P′ del detto circolo saranno date dalla formola

$$(4)\qquad x' = x + R(\cos\theta X_1 + \operatorname{sen}\theta X_2)\,,$$

colle due analoghe per y', z', significando θ l'angolo d'inclinazione del raggio PP′ sulla direzione (X', Y', Z'). Le (4) ci dànno le coordinate del centro P′ di una faccetta f', e poichè il piano π' di questa passa per PP′, ed è inclinato di un certo angolo $\sigma = \sigma(u, v)$ sul piano π, i coseni di direzione X', Y', Z' della normale a π' potranno assumersi dati dalla formola

$$(5)\qquad X' = \operatorname{sen}\sigma(\operatorname{sen}\theta X_1 - \cos\theta X_2) + \cos\sigma X_3\,,$$

colle altre due analoghe.

Per risolvere il nostro problema conviene che nelle (4), (5) si pensino R e σ come funzioni *date* di u, v e si cerchi se è possibile scegliere per θ una conveniente funzione di u, v e *di una costante arbitraria c*:

$$\theta = \theta(u, v, e)\,,$$

per modo che si verifichino le due equazioni

$$(6)\qquad SX'\frac{\partial x'}{\partial u} = 0\quad,\quad SX'\frac{\partial x'}{\partial v} = 0\,.$$

Queste esprimono infatti che le ∞^3 faccette f' si ordinano in ∞^1 superficie S′, date dalle (4), quando vi si ponga $\theta = \theta(u, v, c)$.

3. Se deriviamo le (4), osservando le (1), abbiàmo:

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial x'}{\partial u} &= \left\{\sqrt{E} + \frac{\partial R}{\partial u}\cos\theta - R\operatorname{sen}\theta\left(\frac{\partial\theta}{\partial u} - \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right)\right\}X_1 + \\
&\quad + \left\{\frac{\partial R}{\partial v}\operatorname{sen}\theta + R\cos\theta\left(\frac{\partial\theta}{\partial u} - \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right)\right\}X_2 + \\
&\quad + R\left\{\cos\theta\frac{D}{\sqrt{E}} + \operatorname{sen}\theta\frac{D'}{\sqrt{G}}\right\}X_3\,,\\
\frac{\partial x'}{\partial v} &= \left\{\frac{\partial R}{\partial v}\cos\theta - R\operatorname{sen}\theta\left(\frac{\partial\theta}{\partial v} + \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right)\right\}X_1 + \\
&\quad + \left\{\sqrt{G} + \frac{\partial R}{\partial v}\operatorname{sen}\theta + R\cos\theta\left(\frac{\partial\theta}{\partial v} + \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right)\right\}X_2 + \\
&\quad + R\left\{\cos\theta\frac{D'}{\sqrt{E}} + \operatorname{sen}\theta\frac{D''}{\sqrt{G}}\right\}X_3\,.
\end{aligned}\right.$$

Con queste formiamo le (6), ponendo inoltre

$$(7)\qquad \varDelta = \cot \sigma ,$$

e troveremo per la funzione incognita θ il sistema dfferenziale seguente:

$$(\mathrm{I})\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial\theta}{\partial u} &= \varDelta\left(\frac{D}{\sqrt{E}}\cos\theta + \frac{D'}{\sqrt{G}}\operatorname{sen}\theta\right) + \frac{\sqrt{E}}{R}\operatorname{sen}\theta + \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} \\ \frac{\partial\theta}{\partial v} &= \varDelta\left(\frac{D'}{\sqrt{E}}\cos\theta + \frac{D''}{\sqrt{G}}\operatorname{sen}\theta\right) - \frac{\sqrt{G}}{R}\cos\theta - \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} ; \end{aligned}\right.$$

questo dovrà riuscire, nelle nostre ipotesi, completamente integrabile.

Ora, se scriviamo dapprima le (I) sotto la forma generica

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial\theta}{\partial u} &= A\cos\theta + B\operatorname{sen}\theta + C \\ \frac{\partial\theta}{\partial v} &= A'\cos\theta + B'\operatorname{sen}\theta + C' , \end{aligned}\right.$$

le condizioni d'illimitata integrabilità sono le tre:

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial A}{\partial v} - \frac{\partial A'}{\partial u} + BC' - CB' = 0 \\ &\frac{\partial B}{\partial v} - \frac{\partial B'}{\partial u} + CA' - AC' = 0 \\ &\frac{\partial C}{\partial v} - \frac{\partial C'}{\partial u} + BA' - AB' = 0 . \end{aligned}\right.$$

Per le equazioni (I) i valori di A, B, C ; A', B', C' sono

$$\left\{\begin{aligned} &A = \varDelta\frac{D}{\sqrt{E}} ,\ B = \varDelta\frac{D'}{\sqrt{G}} + \frac{\sqrt{E}}{R} ,\ C = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} \\ &A' = \varDelta\frac{D'}{\sqrt{G}} - \frac{\sqrt{G}}{R} ,\ B' = \varDelta\frac{D''}{\sqrt{G}} ,\ C' = -\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} , \end{aligned}\right.$$

e sostituendo nelle prime due (8), coll'osservare le formole (2) di Codazzi, otteniamo le due seguenti:

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} &D\frac{\partial\varDelta}{\partial v} - D'\frac{\partial\varDelta}{\partial u} + \sqrt{EG}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{R}\right) = 0 \\ &D'\frac{\partial\varDelta}{\partial v} - D''\frac{\partial\varDelta}{\partial u} + \sqrt{EG}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{R}\right) = 0 . \end{aligned}\right.$$

Calcolando in fine la (8_3), con riguardo alle (3), (3*), otteniamo

$$K(\Delta^2+1)=-\frac{1}{R^2},$$

cioè per la (7)

$$K=-\frac{\operatorname{sen}^2\sigma}{R^2}. \tag{10}$$

Quest'ultima formola dimostra intanto che:

Le soluzioni reali del problema sono da cercarsi soltanto fra le superficie a curvature opposte (asintotiche reali).

4. Proseguiamo nell'analisi del problema supponendo soddisfatte le condizioni d'integrabilità (9), (10), nel qual caso il sistema (I) ammette una soluzione $\theta(u, v, c)$ con una costante arbitraria, onde esistono ∞^1 superficie S' trasformate della S. Ciascuna di queste S', insieme colla S, forma, pei dati stessi del problema, la superficie focale della congruenza rettilinea costituita dalle congiungenti PP' i punti corrispondenti di S, S', e invero la PP' è anche l'intersezione dei due piani tangenti π, π'.

Ora dimostriamo che sopra S, S' si corrispondono le asintotiche, che cioè la congruenza è W. Per questo basterà provare (*Lezioni*, vol. II, § 243) che la falda focale S ammette una flessione infinitesima nella quale ciascun suo punto P si sposta nella direzione (X', Y', Z') della normale nel punto corrispondente P' all'altra falda S'.

Se con $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ indichiamo le componenti dello spostamento (infinitesimo) cercato, potremo porre per le (5), indicando T un fattore di proporzionalità

$$\bar{x}=T(\operatorname{sen}\theta X_1-\cos\theta X_2+\Delta X_3), \tag{11}$$

colle analoghe $\bar{y}, \bar{z}$. Si tratterà di determinare T in guisa da soddisfare alle tre equazioni

$$S\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial \bar{x}}{\partial u}=0\;,\quad S\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial \bar{x}}{\partial v}=0\;,\quad S\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial \bar{x}}{\partial v}+S\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial \bar{x}}{\partial u}=0.$$

Sostituendo in queste i valori (11), e tenendo conto delle formole precedenti, si trova che le condizioni per T si riducono alle due seguenti:

$$\left\{\begin{aligned}\frac{\partial \log T}{\partial u}&=\Delta\left(\frac{D}{\sqrt{E}}\operatorname{sen}\theta-\frac{D'}{\sqrt{G}}\cos\theta\right)-\frac{\sqrt{E}}{R}\cos\theta\\ \frac{\partial \log T}{\partial v}&=\Delta\left(\frac{D'}{\sqrt{E}}\operatorname{sen}\theta-\frac{D''}{\sqrt{G}}\cos\theta\right)-\frac{\sqrt{G}}{R}\operatorname{sen}\theta.\end{aligned}\right. \tag{12}$$

Basta dunque provare che la condizione d'integrabilità per le (12) è identicamente soddisfatta. A questo arriviamo nel modo più semplice ricor-

dando che il sistema (1) ammette una soluzione $\theta = \theta(u, v, c)$ con una costante arbitraria c. Se deriviamo le (I) *rapporto al parametro* c, che entra soltanto in θ e poniamo

$$\frac{\partial \theta}{\partial c} = \psi,$$

ne deduciamo subito

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial \log \psi}{\partial u} &= -\Delta\left(\frac{D}{\sqrt{E}} \operatorname{sen}\theta - \frac{D'}{\sqrt{G}} \cos\theta\right) + \frac{\sqrt{E}}{R} \cos\theta \\ \frac{\partial \log \psi}{\partial v} &= -\Delta\left(\frac{D'}{\sqrt{E}} \operatorname{sen}\theta - \frac{D''}{\sqrt{G}} \cos\theta\right) + \frac{\sqrt{G}}{R} \operatorname{sen}\theta . \end{aligned}\right.$$

Confrontando colle (12), vediamo che in effetto queste si soddisfano ponendo, a meno di un fattore costante di proporzionalità

$$T = \frac{1}{\frac{\partial \theta}{\partial c}} .$$

5. Abbiamo così dimostrato che: *la congruenza formata dalle congiungenti i punti corrispondenti di* S, S′ *è una congruenza* W, *che ha* S, S′ *come falde focali.*

Ed ora potremo subito completare il risultato dimostrando che: *le curvature* K, K′ *di* S, S′ *in punti corrispondenti sono eguali.*

E infatti, siccome R rappresenta la distanza focale e σ l'angolo dei piani focali, la formola di Ribaucour per le congruenze W (*Lezioni*, vol. II, § 243) ci dà

$$KK' = \left(\frac{\operatorname{sen}\sigma}{R}\right)^4 :$$

dunque per la (10) sarà

$$K' = K = -\frac{\operatorname{sen}^2\sigma}{R^2} .$$

A questo punto possiamo invocare i teoremi noti sulle congruenze W, a falde focali di eguale curvatura, e dedurne che la curvatura di S, espressa pei parametri α, β delle asintotiche, avrà necessariamente la forma A)

$$K = -\frac{1}{\{\varphi(\alpha) + \psi(\beta)\}^2} .$$

Viceversa per ogni superficie S di questa classe il problema proposto è risolubile, ed anzi in ∞^1 modi poichè sappiamo che, una volta fissata S

nella classe A), resta ancora nelle espressioni del raggio R e dell'angolo σ *una* costante arbitraria.

Dopo ciò si vede che le formole (9), (10) rappresentano, in coordinate ortogonali qualunque, le condizioni necessarie e sufficienti affinchè una superficie S appartenga alla classe A). Si avverta poi che, mentre la condizione (10) dipende solo dall'elemento lineare di S, le altre due (9) contengono invece elementi variabili per flessione. In generale dunque una superficie S della classe A) perde, se si flette, questa sua proprietà, salvo nel caso ben noto delle superficie pseudosferiche, ove Δ ed R sono costanti e le (9) si risolvono in identità.

6. Nel numero precedente abbiamo invocato le proprietà note delle concongruenze W a falde focali di eguale curvatura per completare la risoluzione del nostro problema. Ma possiamo anche, senza ricorrere a queste, proseguire coll'esame diretto delle condizioni (9), (10), e dedurne anzi, in nuovo modo, gli antichi risultati. Per questo conviene prima di tutto trasformare le (9) *in coordinate curvilinee qualunque* (u, v), che diano al ds^2 la forma generale

$$ds^2 = \mathrm{E}du^2 + 2\mathrm{F}du\, dv + \mathrm{G}dv^2 .$$

Semplici considerazioni invariantive dimostrano che le (9) si scrivono nel modo più generale sotto la forma:

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\mathrm{R}}\right) &= \frac{\mathrm{D}' \dfrac{\partial \Delta}{\partial u} - \mathrm{D}\dfrac{\partial \Delta}{\partial v}}{\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}} \\ \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\mathrm{R}}\right) &= \frac{\mathrm{D}'' \dfrac{\partial \Delta}{\partial u} - \mathrm{D}'\dfrac{\partial \Delta}{\partial v}}{\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}} , \end{aligned} \right.$$

mentre la (13), posto $\mathrm{K} = -\dfrac{1}{\varrho^2}$, si scrive sempre

$$\frac{\operatorname{sen}\sigma}{\mathrm{R}} = \frac{1}{\varrho}, \quad \text{o} \quad \frac{1}{\mathrm{R}} = \frac{1}{\varrho \operatorname{sen}\sigma},$$

e si ha $\Delta = \cot\sigma$.

Ora se a linee coordinate prendiamo le asintotiche (α, β), avremo

$$\mathrm{D} = \mathrm{D}'' = 0 \quad , \quad \frac{\mathrm{D}'}{\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}} = \frac{1}{\varrho},$$

onde le (13) diventano

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial\sigma}{\partial\alpha} &= \cot\frac{1}{2}\sigma \cdot \frac{1}{\varrho}\frac{\partial\varrho}{\partial\alpha} \\ \frac{\partial\sigma}{\partial\beta} &= -\operatorname{tg}\frac{1}{2}\sigma \cdot \frac{1}{\varrho}\frac{\partial\varrho}{\partial\beta} . \end{aligned} \right.$$

Qui la condizione d'integrabilità è semplicemente $\frac{\partial^2 \varrho}{\partial\alpha\,\partial\beta}=0$, da cui

$$\varrho=\varphi(\alpha)+\psi(\beta)\,,\quad \text{o}\quad K=-\frac{1}{\{\varphi(\alpha)+\psi(\beta)\}^2}\,.$$

Viceversa se ϱ ha questa forma, le (14) sono completamente integrabili, e però nella espressione di σ, indi di R, entra una costante arbitraria.

Così abbiamo provato direttamente che per ogni superficie S della classe A), e per queste soltanto, il problema proposto al n. 1 ammette soluzioni, anzi ne ammette ∞^1.

7. Dimostriamo da ultimo come questi risultati, ottenuti nell'ipotesi dello spazio euclideo, si estendono facilmente alla geometria non euclidea, dove il problema consente una risoluzione del tutto analoga. Eseguiamo qui i calcoli pel caso dello spazio ellittico, la cui curvatura K_0 si assumerà semplicemente $=1$, e basterà poi indicare le leggiere variazioni da introdursi nelle formole se lo spazio è invece iperbolico.

Qui per utilizzare subito le formole date in altra mia Memoria (¹) riferiremo la superficie data S alle sue linee di curvatura $(u\,,v)$, e indicheremo con $r_1\,,r_2$ i raggi principali (ridotti) di curvatura, legati ai coefficienti E, G del $ds^2=E du^2+G dv^2$ dalle equazioni di Codazzi

$$(15)\qquad \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\sqrt{G}}{r_1}\right)=\frac{1}{r_2}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\,,\quad \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\sqrt{E}}{r_2}\right)=\frac{1}{r_1}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\,,$$

e dalla relazione di Gauss:

$$(16)\qquad \frac{1}{r_1 r_2}+1=-\frac{1}{\sqrt{EG}}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right)\right\}.$$

Indicando, come al n. 1, con $R=R(u\,,v)$ il raggio del circolo, con $\sigma=\sigma(u\,,v)$ l'angolo d'inclinazione del piano delle faccette f' sul piano della corrispondente faccetta $f\equiv(u\,,v)$, ed avendo ancora θ il significato del n. 2, dai calcoli eseguiti al § 1 della Memoria ora citata dedurremo per l'incognita θ il sistema differenziale:

$$(17)\qquad \left\{\begin{aligned}\frac{\partial\theta}{\partial u}&=\sqrt{E}\cot R\,.\,\mathrm{sen}\,\theta-\frac{\sqrt{E}}{r_2}\cot\sigma\,.\cos\theta+\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\\ \frac{\partial\theta}{\partial v}&=-\sqrt{G}\cot R\,.\cos\theta-\frac{\sqrt{G}}{r_1}\cot\sigma\,.\,\mathrm{sen}\,\theta-\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\,.\end{aligned}\right.$$

(¹) *Sopra alcune classi di congruenze rettilinee negli spazii di curvatura costante* (Annali di matematica, tomo X della serie 3ª, 1904).

Per esprimere le condizioni d'illimilata integrabilità dovremo qui porre, nelle notazioni del n. 3:

$$\begin{cases} A = -\dfrac{\sqrt{E}}{r_2}\cot\sigma\ , & B = \sqrt{E}\cot R\ , & C = \dfrac{1}{\sqrt{G}}\dfrac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} \\ A' = -\sqrt{G}\cot R\ , & B' = -\dfrac{\sqrt{G}}{r_2}\cot\sigma\ , & C' = -\dfrac{1}{\sqrt{E}}\dfrac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} \end{cases}$$

e sostituire questi valori nelle (8). Le due prime ci dànno, a causa delle (15):

$$\text{(18)} \qquad \begin{cases} \sqrt{G}\,\dfrac{\partial\cot R}{\partial u} = \dfrac{\sqrt{E}}{r_2}\dfrac{\partial\cot\sigma}{\partial v} \\ \sqrt{E}\,\dfrac{\partial\cot R}{\partial v} = -\dfrac{\sqrt{G}}{r_1}\dfrac{\partial\cot\sigma}{\partial u}\ , \end{cases}$$

mentre la terza (8) diventa per la (16)

$$\text{(19)} \qquad \frac{1}{r_1 r_2} = -\frac{\operatorname{sen}^2\sigma}{\operatorname{sen}^2 R}\,.$$

Questa ultima dice intanto che la curvatura *relativa*

$$k_0 = \frac{1}{r_1 r_2}$$

dalla superficie S deve essere negativa (asintotiche reali).

8. Supposte soddisfatte le condizioni (18), (19), *necessarie e sufficienti* per la solubilità del problema, avremo che le ∞^3 faccette derivate f' si distribuiranno in ∞^1 superficie trasformate S', e ciascuna di queste formerà colla S, come al n. 5, le due falde della congruenza costituita dalle congiungenti PP' i punti corrispondenti. Dimostriamo anche qui che: *sopra* S, S' *si corrispondono le asintotiche* (*congruenza* W).

Per questo basterà provare che i coefficienti D, D', D'' della seconda forma fondamentale della S' sono proporzionali ai corrispondenti della S, che sussistono cioè le relazioni

$$\text{(20)} \qquad D' = 0 \qquad \frac{G}{r_1}D - \frac{E}{r_2}D'' = 0\,.$$

In effetto, dai calcoli eseguiti al § 1 della detta Memoria, abbiamo in generale le formole:

$$\left\{\begin{aligned}
D &= \sqrt{E}\,\frac{\operatorname{sen}\sigma}{\operatorname{sen}R}\operatorname{sen}\theta\left(\frac{\partial R}{\partial u}+\sqrt{E}\cos\theta\right)+\\
&\qquad+\frac{\sqrt{E}}{r_2}\,\frac{\operatorname{sen}R}{\operatorname{sen}\sigma}\cos\theta\left(\frac{\partial\sigma}{\partial u}+\frac{\sqrt{E}}{r_2}\operatorname{sen}\theta\right)\\
D' &= -\sqrt{G}\,\frac{\operatorname{sen}\sigma}{\operatorname{sen}R}\cos\theta\left(\frac{\partial R}{\partial u}+\sqrt{E}\operatorname{sen}\theta\right)+\\
&\qquad+\frac{\sqrt{E}}{r_2}\,\frac{\operatorname{sen}R}{\operatorname{sen}\sigma}\cos\theta\left(\frac{\partial\sigma}{\partial v}-\frac{\sqrt{G}}{r_2}\cos\theta\right)\\
D' &= \sqrt{E}\,\frac{\operatorname{sen}\sigma}{\operatorname{sen}R}\operatorname{sen}\theta\left(\frac{\partial R}{\partial v}+\sqrt{G}\operatorname{sen}\theta\right)+\\
&\qquad+\frac{\sqrt{G}}{r_1}\,\frac{\operatorname{sen}R}{\operatorname{sen}\sigma}\operatorname{sen}\theta\left(\frac{\partial\sigma}{\partial u}+\frac{\sqrt{E}}{r_2}\operatorname{sen}\theta\right)\\
D'' &= -\sqrt{G}\,\frac{\operatorname{sen}\sigma}{\operatorname{sen}R}\cos\theta\left(\frac{\partial R}{\partial v}+\sqrt{G}\operatorname{sen}\theta\right)+\\
&\qquad+\frac{\sqrt{G}}{r_1}\,\frac{\operatorname{sen}R}{\operatorname{sen}\sigma}\operatorname{sen}\theta\left(\frac{\partial\sigma}{\partial v}-\frac{\sqrt{G}}{r_1}\cos\theta\right),
\end{aligned}\right.$$

e nel caso nostro, sussistendo le (18), (19), si verifica subito che ne seguono le (20).

Dimostrato così che la congruenza a falde focali S, S' è una congruenza W, basterà ora invocare il teorema generalizzato di Ribaucour (Mem. cit., § 16), che nello spazio ellittico assume la forma

$$k_0\,k_0' = \left(\frac{\operatorname{sen}\sigma}{\operatorname{sen}R}\right)^4,$$

essendo k_0, k_0' le curvature (relative) delle due falde focali S, S', e dalla (19) risulterà

$$k_0' = k_0 = -\frac{\operatorname{sen}^2\sigma}{\operatorname{sen}^2 R}.$$

Si conclude che: *le due falde focali* S, S' *hanno in punti corrispondenti eguali curvature.*

Si sa che le superficie S dello spazio ellittico che formano le falde focali di siffatte congruenze W sono *caratterizzate* dalla proprietà (Mem. cit., § 17) che la loro curvatura relativa k_0, espressa pei parametri α, β delle asintotiche, prende la forma

B) $$k = -\left\{\frac{1+\varphi(\alpha)\,\psi(\beta)}{\varphi(\alpha)+\Psi(\beta)}\right\}^2,$$

da sostituirsi nello spazio ellittico alla formola euclidea A). Viceversa ogni superficie S dello spazio ellittico di questa classe B) è falda focale di ∞^2 congruenze dello spazio, onde per ogni tale S il problema proposto ammette ∞^1 soluzioni.

Risultati del tutto analoghi si hanno nel caso iperbolico $K_0 = -1$, dove le funzioni circolari di R sono da mutarsi nelle corrispondenti iperboliche, e la formola B) è da sostituirsi coll'altra

$$k_0 = -\left\{ \frac{1 + \varphi(\alpha)\,\psi(\beta)}{\varphi(\alpha) - \psi(\beta)} \right\}^2 .$$

Fisiologia. — *Innervazione del ricambio.* Memoria del Socio A. Stefani.

Questo lavoro sarà pubblicato nei volumi delle *Memorie.*

Meccanica celeste. — *Sulla Polodia.* Nota di G. Boccardi, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

In una Nota pubblicata in questi Rendiconti [1] si critica un articolo del dott. E. Roggero (*Bulletin Astronomique* 1913) che ha per oggetto alcune formole per determinare la polodia.

In assenza del Roggero (attualmente al fronte) ho giudicato opportuno di dettare altrove alcune pagine per spiegare il punto di vista nel quale egli si è probabilmente messo, non senza rilevare anche io che la esposizione del Roggero si presta all'equivoco ed è incompleta. Ho stimato doveroso dettar quelle pagine anche per ispiegare la fiducia con la quale ho senz'altro ripetute le conclusioni di lui. Credo però prezzo dell'opera il riassumere in questi stessi *Rendiconti* le cose principali da me pubblicate altrove.

Io non credo che le osservazioni sulla variazione della latitudine sieno destinate, come le esperienze di gabinetto nei corsi di fisica o chimica, a conferma di una qualche teoria [2] sulla rotazione terrestre. Ogni teoria di matematica applicata richiede il sostrato di ipotesi fisiche, ed ha tanto valore per quanto i fatti confermano siffatte ipotesi.

(1) V. Cerulli, *Sulla determinazione della polodia* (4 febbr. 1917).

(2) L'impostazione varia da teoria a teoria. Così per es., in un primo tipo, si considera la Terra rigida (Euler), ovvero costituita da un nucleo rigido, entro cui avvengono ciclici trasporti di massa (Volterra); in un secondo tipo, si tien conto di deformazioni elastiche (Lord Kelvin, Larmor) conservative, oppure (Darwin) dissipative, con speciale riguardo all'azione delle maree.

Se i dati di osservazione contrastano con la teoria, questo deve far pensare ad altre ipotesi fisiche e modifiche nella teoria stessa.

Il dott. Roggero, poggiandosi su i risultati delle osservazioni, ha considerato la direzione dell'asse istantaneo di rotazione della Terra come non assolutamente fissa nello spazio. Egli però avrebbe dovuto accennare altresì a quegli spostamenti nell'interno della Terra, dell'asse istantaneo di rotazione, che sono certo elemento integrante del fenomeno: tale ad es., supponendo la Terra rigorosamente rigida, quello che dà luogo al *ciclo euleriano*.

Ma anche dalla sola teoria di Euler, ammettendo per vere le ipotesi su cui essa riposa, risulta che l'asse istantaneo, oltre al muoversi nell'interno della Terra per lo spostarsi di questa, è soggetto ad una piccola *nutazione diurna*, ossia ad un piccolo moto oscillatorio nello spazio, siccome lo stesso asse d'inerzia ha esso pure una nutazione diurna molto più notevole, nutazione che produce variazioni nella latitudine nel corso di un giorno sidereo, ed alla quale non si è badato nel tracciamento della polodia col metodo fin qui seguito. Inoltre l'asse d'inerzia subisce una nutazione semidiurna. L'insieme di tutte queste nutazioni può giungere ad una ampiezza tre volte maggiore di quella del termine z di Kimura, al quale si è invece avuto riguardo.

Il dott. Roggero avrebbe dovuto accennare alla complessità del problema e non affermare che con le osservazioni di una sola stazione si può tracciare la polodia. Il Cerulli fa vedere come ciò sarebbe possibile soltanto con osservazioni di precisione quale oggi non si può raggiungere, e di più, supposti noti gli spostamenti dello zenit nel senso perpendicolare al meridiano. Io invece aggiungo che nemmeno questo basterebbe, perchè occorrerebbe avere riguardo alle nutazioni diurne ed a molte altre cose. Troppe incognite presenta il problema. Del resto, le ricerche del Roggero gli sono servite soltanto per la sua tesi di laurea, e nell'Osservatorio di Pino non ci occupiamo, come sembra che pensi il dott. Cerulli, di tracciare la polodia, nè col metodo del Roggero nè con altro. Noi siamo rimasti nel campo delle osservazioni, di cui altri ha fatto risaltare la precisione, ed abbiamo messo in luce variazioni della latitudine a breve periodo, anche esse sfuggite nel tracciamento ordinario della polodia.

In conclusione, mi sembra che il meglio si possa fare sia di seguire il consiglio del Poinsot (*Précession des équinoxes*):

..... dans des problèmes de cette nature, la difficulté des intégrations nous force de négliger, presque à chaque pas, quelque terme qui nous arrête; ce qui revient au fond à négliger une partie des causes du phénomène *tandis que l'observation qui ne s'attache qu'au résultat, tient tacitement compte de toutes les causes, connues ou inconnues*, qui peuvent y concourir ».

Geofisica. — *Ancora sulla polodia.* Nota del Corrispondente V. Cerulli.

Fra le varie pretensiose ed erronee asserzioni contenute nella Nota di questo Rendiconto, dettata dal sig. Boccardi — della quale è piaciuto alla cortesia dell'illustre Consocio Levi-Civita farmi leggere il manoscritto — l'Accademia mi consentirà di rilevare, senza indugio, per dimostrarlo insussistente, l'appunto che il sig. Boccardi fa al metodo fin qui tenuto nel tracciamento della polodia, l'appunto, dico, di *non aver badato alla nutazione diurna.*

Si sa che i calcoli fatti finora in questo campo non erano intesi a descrivere tutte le accidentalità della curva polodica, bensì solo il suo *corso medio*, abbastanza complicato esso pure; ma potrebbe nascere il dubbio che trascurando tali accidentalità, oltre che nella rappresentazione grafica, anche nel calcolo delle coordinate medie del polo, giorno per giorno, queste ultime abbiano potuto risentirne qualche alterazione, cosicchè la polodia, quale la vediamo disegnata dal 1900 in qua, possa non essere in tutto e per tutto la genuina espressione del cammino del polo sopra la Terra.

La nutazione di cui qui si tratta è l'epiciclo che il polo dovrebbe descrivere, secondo la teoria, giornalmente attorno ad una posizione media, movendosi, non in senso diretto, come fa in generale il polo medio, bensì in senso contrario a quello in cui si compie la rotazione della Terra, vale a dire nel senso in cui sono contati gli angoli orari delle stelle e le longitudini terrestri. Se riferiamo quindi le coordinate del polo di rotazione ad un sistema cartesiano centrato nel polo geografico, ed il cui asse positivo delle x sia tangente al meridiano di Greenwich e l'asse positivo delle y tangente al meridiano che sta 90° ad occidente di Greenwich, e se indichiamo, inoltre, con μ il raggio dell'epiciclo polare e con ν la sua fase nell'istante in cui una qualunque delle stelle (¹) impiegate per la misura della latitudine nelle 6 stazioni boreali, passa pel meridiano di Greenwich, le variazioni diurne delle coordinate del polo medio saranno da scrivere sotto la forma:

$$dx_0 = \mu \cos(\nu + K\lambda) \qquad dy_0 = \mu \sin(\nu + K\lambda)$$

dove λ è la longitudine rispetto a Greenwich, e contata verso Occidente,

(¹) Per semplificare il discorso parlo di *stelle*, anzichè di *coppie talcottiane di stelle* poichè in sostanza la coppia equivale alla stella unica zenitale, osservata in entrambe le posizioni del Zenit-telescopio, ossia invertendo questo durante il passaggio.

della stazione in cui la stella culmina, e K un coefficiente numerico poco maggiore di 1.

La differenza $\varphi - \varphi_0$ fra l'altezza polare osservata in detta stazione e la latitudine geografica [1] dovrà, ciò posto, verificare l'equazione:

$$\begin{aligned}\varphi - \varphi_0 &= x \cos\lambda + y \sin\lambda = \\ &= [x_0 + \mu \cos(\nu + K\lambda)] \cos\lambda + [y_0 + \mu \sin(\nu + K\lambda)] \sin\lambda = \\ &= x_0 \cos\lambda + y_0 \sin\lambda + \mu \cos[\nu + (K-1)\lambda]\end{aligned}$$

x_0 ed y_0 denotando le coordinate del *polo medio del giorno*. L'ultimo termine per la piccolezza di μ e di $K - 1$ non si differenzia sensibilmente da $\mu \cos\nu$. È dunque una costante comune a tutte le stazioni internazionali nord, e che solo dipende dalla stella osservata. Chiamata z questa costante, le 6 stazioni forniscono quotidianamente, per ciascuna stella, 6 equazioni della forma: $\Delta\varphi = x_0 \cos\lambda + y_0 \sin\lambda + z$, ed è chiaro che questa forma non si altera, cioè il terzo termine resta sempre una costante, anche quando per ogni stazione si formi la media delle n equazioni rispondenti alle *n stelle di latitudine* osservate.

Risolvendo dunque le 6 equazioni di tipo

$$\varphi - \varphi_0 = x \cos\lambda + y \sin\lambda + z$$

troveremo le coordinate x ed y del polo medio di ciascun giorno senza verun pericolo che i loro valori abbiano a riuscir falsati per effetto della nutazione. Il pericolo ci sarebbe solo se la nutazione introducesse altri termini, oltre la costante z, paragonabili a questa ed agli altri due, e che noi li trascurassimo; mentre ponendo $\mu \cos[\nu + (K-1)\lambda] = \mu \cos\nu$ noi non trascuriamo che un termine in $\mu(K-1)$, vale a dire di secondo ordine.

Ora la formola dianzi scritta per $\varphi - \varphi_0$ è precisamente quella che si impiega per tracciare la polodia nel metodo delle stazioni internazionali. Il metodo stesso è dunque, almeno per quanto riguarda la nutazione, perfettamente corretto.

Ma l'elaborazione delle latitudini in base alla formola trinomia, oltre darci le coordinate del polo medio diurno indipendentemente dalla nutazione, ci ha anche insegnato che quest'ultima non ha un'amplitudine tale da poter essere avvertita, nello stato attuale della tecnica astronomica. In altre pa-

[1] La latitudine φ_0, costante per ogni stazione, è il valore che prenderebbe l'altezza polare se il polo di rotazione venisse a coincidere con l'origine fissa delle coordinate x, y. Questa origine è scelta in modo da star presso da poco nel centro delle spire della polodia, ed in essa si colloca il *polo geografico*, la cui posizione, per la indeterminatezza che le è propria, può, entro certi limiti, esser fissata ad arbitrio. Il polo geografico si chiama di solito *polo medio*, locuzione che nel testo abbiamo evitata per non far nascere confusione col polo medio diurno.

role: la polodia *vera* non si distingue dalla polodia *media*. Infatti, la fase ν variando rapidamente, di 15° circa in un'ora, se il z effettivamente risultante dal detto calcolo, ossia il termine di Kimura, provenisse dalla nutazione, o anche solo fosse $\mu \cos \nu$ parte cospicua di z, converrebbe che ogni giorno il z calcolato in media dal primo gruppo di stelle accennasse ad una differenza sistematica con quello dedotto dal secondo gruppo: ciò che non è affatto risultato finora essere il caso, tuttochè gli z si assoggettassero al più rigoroso e minuto esame, appunto per studiarne il periodo. Un periodo fu scoperto infatti, ma assai lento, di circa un anno.

È poi facilissimo vedere che le coordinate x ed y si determinano indipendentemente anche dalle variazioni del polo a periodo più corto di un giorno, nonchè dall'influsso lunare sulla verticale. Le prime, appunto per il corto periodo, si eliminano automaticamente dalle equazioni normali, ove si sommano, con completo pareggio delle più minute onde, i $\Delta\varphi$ delle diverse stazioni [1]: il secondo, per essere sensibilmente eguale in tutte le stazioni internazionali, che lavorano sotto eguale latitudine e con le stesse stelle, si riversa, come la nutazione diurna, per intero sul termine z [2].

Anzichè, dunque, criticare il metodo di tracciamento della polodia, seguìto fin qui, dobbiamo riconoscere che non sarebbe facile concepirne un altro che più sapientemente provvedesse a rendere innocue tutte le benchè minime e le problematiche cause di errore.

La polodia così tracciata ha il pregio eminente di rappresentare il cammino del polo in modo del tutto sperimentale, *indipendentemente* cioè *da tutte le teorie della rotazione terrestre*, onde è un acquisto veramente prezioso così per la geofisica che per la meccanica celeste, cui porge il mezzo

(1) Si eliminerebbe anche una eventuale nutazione diurna in senso opposto al sopra considerato, che è proprio della Terra rigida.

(2) Per i periodi lunari della verticale può ripetersi lo stesso ragionamento fatto sopra per la nutazione. Se le loro amplitudini fossero accessibili ai nostri telescopî zenitali, il termine z risulterebbe diverso secondo che dedotto dall'una o dall'altra stella di ciascun giorno, e l'andamento degli z medî, in più di un decennio di lavori, avrebbe messi i detti periodi nella più perfetta evidenza. Così, l'opera internazionale delle latitudini ha creato nel termine z di Kimura un nuovo interessante problema, che non si risolve nè con l'ipotesi che il termine provenga dalla nutazione, nè con quella che lo facesse dipendere dall'azione lunare sulla verticale, o da entrambe queste cause unite insieme, entrambe le cause essendosi mostrate incapaci di dare effetti sensibili agli attuali mezzi di misura. Questo ultimo risultato potevamo aspettarcelo. Il zenit-telescopio non è il pendolo orizzontale, e nulla di più stolto del credere che quando un istrumento è impari ad un certo ordine di grandezze, si possa nondimeno arrivare a scoprir queste moltiplicando le misure. Vero è che il sig. Boccardi ci fa sapere di aver *messo in luce* variazioni di latitudine a breve periodo, *sfuggite* nel tracciamento della polodia, ma non ci dice come si assicurò che — almeno — gli *errori probabili* di tali variazioni, che vorremmo dire *osservate*, non superassero le variazioni stesse.

rigoroso di verificare teorie e calcoli, e presenta nuovi problemi *reali* da affrontare.

Il sig Boccardi estende la sua obbiezione, relativa alla nutazione diurna, anche al metodo, cui io accennava nella mia Nota del febbraio u. s., di determinar la polodia in base alle due componenti dello spostamento del Zenit in un'unica stazione. Ma se le misure si distribuiscono con qualche uniformità lungo il corso della giornata, facendole p. es. di 6 in 6, o di 8 in 8 ore ecc. ecc., è pur chiaro che la nutazione, anche supponendone percettibile l'ampiezza, viene a restare, nel medio, eliminata. Io chiamai questo metodo *puramente teorico*, ma seppi poi che ha già dato buoni risultati pratici a Pulkova ed a Leida, in epoche nelle quali il metodo tanto più sicuro delle stazioni internazionali non era stato ancora messo in opera.

Matematica. — *Affinità e superficie applicabili.* Nota di E. Bompiani, presentata dal Corrispondente Castelnuovo.

1. Nel costruire la teoria delle superficie applicabili di specie qualsiasi [1] mi sono imbattuto nella seguente questione:

« Dati due spazi affini, esistono in essi superficie corrispondenti applicabili di una determinata specie? ».

Si prevede che, fissata la specie ν dell'applicabilità, l'esistenza di tali superficie dipende dalla dimensione degli spazi che si pongono in corrispondenza affine, perchè se gli spazi hanno dimensioni abbastanza piccole, le condizioni poste dall'applicabilità possono portare all'uguaglianza dei due spazi, quindi delle due superficie. Il problema consiste dunque nel determinare un limite per la dimensione $r+1$ dei due spazi tale che al di sotto di esso non possano esistere superficie corrispondenti applicabili di specie ν.

Nella nostra teoria vedremo che il caso più interessante è quello in cui la risposta alla domanda formulata è negativa; ma anche prescindendo da questa teoria, per la quale il teorema che abbiamo in vista è fondamentale, mi pare che la questione abbia per sè interesse e d'altra parte il metodo è abbastanza semplice perchè se ne possa comprendere l'esposizione staccata dal resto della teoria.

2. Cominciamo da alcune osservazioni affatto elementari sull'affinità fra due S_{r+1}, siano S ed $\overline{S}$.

Scelti due $(r+1)$-edri ortogonali corrispondenti (come si può), le equazioni della trasformazione fra S ed $\overline{S}$ sono del tipo

$$\overline{X}_i = l_i\, X_i \qquad (i = 1, \dots, r+1).$$

[1] Per le deformazioni di specie ν vedi la mia Nota: *Basi analitiche per una teoria delle deformazioni delle superficie di specie superiore* [Rendic. Acc. dei Lincei, vol. XXV, serie 5ª, fasc. 9 (1916₁), pp. 627-634].

Punteggiate corrispondenti sono simili; il rapporto di similitudine dipende solo dalla direzione; in particolare sono uguali alle corrispondenti le rette di S che hanno le loro direzioni (che diremo *direzioni di uguaglianza*) sulla quadrica all'infinito:

$$\sum_{1}^{r+1}{}_i\,(l_i^2-1)\,X_i^2=0 \qquad X_{r+2}=0\,.$$

L'indice di specializzazione di questa quadrica si dirà anche *indice di specializzazione dell'affinità.*

È evidente che se in un piano vi sono tre rette uguali alle corrispondenti, i due piani corrispondenti sono uguali. Un piano contiene in generale due direzioni di rette uguali alle corrispondenti: se il loro angolo è uguale a quello delle corrispondenti, il loro piano è uguale al corrispondente. Da ciò segue che:

Se in uno S_k *vi sono* ∞^{k-2} *direzioni di uguaglianza non tutte di un* S_{k-1}, *e se una di esse forma con le altre angoli uguali ai corrispondenti, lo* S_k *è uguale al corrispondente nell'affinità.*

4. Esistono superficie applicabili in due S_3 affini?

Consideriamo punti corrispondenti delle due superficie σ e $\bar{\sigma}$ applicabili ed affini: le rette uscenti da quei punti e situate nei piani tangenti si corrispondono per uguaglianza, essendo uguali su di esse gli elementi lineari delle superficie.

Il cono delle rette d'uguaglianza col vertice in un punto della superficie σ contiene il piano ivi tangente: è dunque spezzato e per ragioni di continuità tutti i piani tangenti dovrebbero passare per la traccia di uno di essi sul piano all'infinito.

Ciò è impossibile se la superficie stessa non è un piano e proprio un dei piani uguali ai corrispondenti.

Se due spazi S_3 *riferiti in modo affine possoggono due superficie corrispondenti applicabili, i due spazi, quindi le due superficie, si ottengono l'uno dall'altro con un movimento.*

4. Esaminiamo la stessa questione in S_4.

I piani tangenti alla superficie di S devono passare per le generatrici di un sistema della quadrica delle direzioni di uguaglianza; cioè nel caso generale vi sarebbero ∞^1 piani tangenti per ogni generatrice: assurdo. Se poi esistessero soli ∞^1 piani tangenti (la superficie sarebbe sviluppabile) le loro rette all'∞ dovendo essere incidenti se infinitamente vicine, non possono appartenere alla quadrica.

Se la quadrica all'infinito si specializza, cioè se l'affinità è speciale e possiede ∞^1 giaciture d'uguaglianza, aventi in comune una direzione, ∞^1 piani aventi quelle giaciture inviluppano un cilindro applicabile sul corrispondente.

Infatti, se le equazioni dell'affinità speciale sono

$$\overline{X}_i = l_i X_i \qquad (i = 1, 2, 3) \text{ e } \overline{X}_4 = X_4$$

assunta nello S_3 (X_1, X_2, X_3) una *curva*

$$X_i = X_i(u)$$

tale che

$$\sum_{1}^{3}{}_i (l_i^2 - 1)\left(\frac{dX_i}{du}\right)^2 = 0,$$

ogni cilindro per essa con le generatrici parallele ad X_4 è applicabile sul corrispondente, senza essere affatto uguale ad esso. Tutte le curve nominate si sanno costruire perchè si ottengono con l'affinità

$$X_i' = \sqrt{l_i^2 - 1}\, X_i$$

dalle curve isotrope dello spazio S_3 (X_1', X_2', X_3').

Se poi la quadrica di uguaglianza si spezza in due piani, i piani tangenti debbono tutti incidere lungo rette uno di essi. Da ciò si deduce subito che la superficie sta in S_3; siamo quindi nel caso di prima. Quindi:

Neppure in due S_4 *affini esistono superficie corrispondenti applicabili* (*esclusi i cilindri inviluppati da piani uguali se l'affinità è speciale*).

5. In S_5. Consideriamo in un punto della superficie il piano osculatore ad una linea a prima curvatura invariante [1]. Anche questo è (oltre il piano tangente) uguale al suo corrispondente: quindi l'affinità fra i due piani fa corrispondere alla tangente e alla prima normale principale alla curva gli elementi analoghi della curva trasformata. D'altronde, come vedremo subito, l'angolo della prima normale principale detta con una tangente assegnata è uguale al corrispondente: per l'osservazione fatta sull'affinità, lo S_3 che congiunge il piano tangente al piano osculatore ad una curva di prima curvatura invariante, è uguale al corrispondente.

Da quanto abbiamo detto risulta che in ogni punto della superficie esiste *almeno* uno S_3 uguale al corrispondente. Cioè la quadrica dello S_4 all' ∞ di S_5 che dà le direzioni d'uguaglianza contiene dei piani.

Perchè ciò sia, la quadrica dev'essere specializzata.

Se è specializzata una volta si compone di ∞^1 S_2 per un punto: ∞^1 di quegli S_3 passano per un S_2, quindi ∞^1 S_2 tangenti tagliano uno S_2 della quadrica in rette e per ciò stanno in uno S_3. Dunque la superficie ha ∞^2 curve in S_3: ma i piani tangenti lungo una di esse stanno in S_3, quindi ogni S_3 contiene due di queste curve infinitamente vicine e, perciò, se la

(1) *Basi analitiche* ecc., ultimo alinea del n. 5.

superficie non sta in S_3 (nel qual caso sarebbe rimasta rigida) le curve stanno in S_2 osculatori ad una curva. Le rette all'infinito di due di questi piani infinitamente vicini s'incidono: ciò non è possibile che se tutte queste rette stanno in un piano della quadrica di S_4 (e si avrebbero di nuovo superficie uguali alle corrispondenti), o se passano per il vertice: in questo caso, l'unico che risponda al nostro problema, la superficie è un cilindro inviluppato dai piani uguali ai corrispondenti.

Se la quadrica fosse due volte specializzata, si vedrebbe analogamente che la superficie contiene ∞^1 curve in piani passanti per la sua retta vertice; contiene altresì ∞^1 curve negli S_3 normali a questa giacitura: le tangenti a queste curve vanno ad appoggiarsi alla conica segata dallo S_2 all'infinito degli S_3 sulla quadrica.

Se due S_5 sono riferiti in un'affinità non speciale e contengono superficie applicabili di prima specie corrispondenti, essi, come pure le superficie corrispondenti, sono uguali.

Se l'affinità è una o due volte specializzata, possono aversi risp. cilindri e superficie con ∞^1 curve in un sistema di piani paralleli, delle particolari specie sopra descritte, applicabili e non uguali ai corrispondenti.

6. Una deformazione di specie ν di una superficie lascia inalterati gli elementi lineari e le prime $\nu - 1$ curvature di tutte le sue curve. Riferiti i punti corrispondenti di due superficie applicabili di specie ν alle stesse coordinate curvilinee u, v, i simboli

$$[h k l m] = \sum_1^n {}_i \frac{\partial^{h+k} X_i}{\partial u^h \partial v^k} \frac{\partial^{l+m} X_i}{\partial u^l \partial v^m} = [l m h k]$$

per

$$h + k \leq \nu \quad , \quad l + m \leq \nu$$

sono uguali in punti corrispondenti delle due superficie ([1]). Se $h + k \geq l + m$ si dice che $h + k$ è l'*ordine* del simbolo: si dimostra che sono anche uguali i simboli *dedotti* d'ordine $\nu + 1$, per i quali

$$\nu + 1 = h + k > l + m .$$

7. Consideriamo una curva (sulla quale assumeremo variabile la sola u) di una superficie ed un suo punto P: determiniamo l'angolo della sua prima normal principale con una tangente alla superficie in P. I coseni direttori della prima retta sono proporzionali a

$$\begin{vmatrix} \Sigma_i \left(\dfrac{\partial X_i}{\partial u}\right)^2 & \dfrac{\partial X_i}{\partial u} \\ \Sigma_i \dfrac{\partial X_i}{\partial u} \dfrac{\partial^2 X_i}{\partial u^2} & \dfrac{\partial^2 X_i}{\partial u^2} \end{vmatrix}$$

([1]) Nota citata, n. 5.

e quelli della seconda a $\frac{\partial X_i}{\partial u} + \lambda \frac{\partial X_i}{\partial v}$ (λ è il parametro che individua la tangente fissata). Il coseno del loro angolo è funzione di λ, di simboli del primo ordine, di simboli dedotti del secondo ordine e del simbolo [2020]. Per due superficie applicabili, siccome la rappresentazione è conforme, tangenti corrispondenti sono individuate dallo stesso valore di λ: i simboli nominati, eccetto al più [2020], sono pure uguali per le due superficie. Se poi la curva di cui trattasi è a prima curvatura invariante, anche [2020] è invariante.

Si ha dunque:

In una deformazione di prima specie è invariante l'angolo che la normale principale in un punto di una curva a prima curvatura invariante forma con il piano tangente.

Questa è l'osservazione già applicata al n. 5.

Se poi la deformazione è di seconda specie, ogni curva conserva la prima curvatura; quindi:

In una deformazione di seconda specie è invariante l'angolo che la normale principale ad una curva qualsiasi in un suo punto forma col piano ivi tangente.

8. Ricordiamo ora la definizione di spazio h-tangente, $S(h)$, ad una superficie in un suo punto [1]: esso è lo spazio definito dal punto (X_i) stesso e dai suoi derivati $\left(\frac{\partial X_i}{\partial u}\right), \left(\frac{\partial X_i}{\partial v}\right), \left(\frac{\partial^2 X_i}{\partial u^2}\right), \ldots$ fino a quelli di ordine h. Lo $S(h)$ contiene gli S_h osculatori alle curve della superficie nel punto, ma in generale non coincide col loro luogo. La sua dimensione per $h > 1$, ed escluse le ordinarie sviluppabili, è compresa fra $h + 2$ ed $\frac{h(h+3)}{2}$; due $S(h)$ h-tangenti in due punti successivi, si tagliano in uno $S(h-1)$.

Vogliamo dimostrare che *in una deformazione di specie ν fra due superficie affini gli $S(\nu)$ corrispondenti sono uguali.*

Consideriamo una curva qualsiasi di una superficie ed un suo punto, la tangente ivi, il piano osculatore, ..., lo S_ν osculatore. È subito visto che questi spazi sono uguali ai corrispondenti.

Gli S_ν osculatori alle curve di una superficie uscenti da un suo punto formano un cono algebrico entro lo $S(\nu)$, ma in generale non lo riempiono; quindi l'uguaglianza degli S_ν osculatori corrispondenti non basta, se lo $S(\nu)$ è abbastanza ampio, ad assicurare l'uguaglianza dei due $S(\nu)$ corrispondenti.

Pensiamo allora due curve uscenti da un punto della superficie, i loro S_ν ivi osculatori e una retta in ciascuno di essi. L'angolo di queste rette di-

[1] Cfr. la mia Nota *Sopra alcune estensioni dei teoremi di Meusnier e di Eulero* [Atti Acc. di Torino, vol. XLVIII, 1913], n. 5, ove questo spazio è indicato con $S(h, 0)$.

pende dai parametri che servono a fissare ciascuna di esse entro il proprio S_ν e, come si vede subito, da simboli d'ordine $\leq \nu$.

Siccome quei due S_ν sono uguali ai corrispondenti nell'affinità, i parametri che individuano una retta entro uno di essi sono uguali a quelli che individuano la retta corrispondente entro lo S_ν corrispondente. I simboli di ordine $\leq \nu$ rimangono invariati in una deformazione di specie ν, quindi gli angoli di quelle due rette sono invarianti per deformazione. Siccome queste due rette sono arbitrarie, sempre per la stessa osservazione fatta sull'affinità, anche lo spazio congiungente quei due S_ν è uguale al corrispondente.

Su questi nuovi spazi, uguali ai corrispondenti, ragioniamo come prima. O essi riempiono lo $S(\nu)$ e allora questo è uguale al corrispondente; o essi non riempiono lo $S(\nu)$ e allora consideriamo due di quegli spazi e dimostriamo, come sopra, che il loro congiungente è uguale al corrispondente Con questo procedimento si vengono ad ampliare ogni volta la dimensione degli spazi che si dimostrano uguali ai corrispondenti e il loro sistema. Quando questo riempie lo $S(\nu)$ allora la dimostrazione è terminata.

9. Siamo giunti a questo; che *gli* $S(\nu)$ *tangenti a due superficie affini ed applicabili di specie* ν *in punti corrispondenti sono uguali*.

Quindi il cono quadrico passante per un punto della superficie data, formato dalle rette uguali alle corrispondenti, contiene lo $S(\nu)$ tangente ivi alla superficie.

Se escludiamo il caso delle ordinarie sviluppabili, nel qual caso lo $S(\nu)$ è uno $S_{\nu+1}$ e ne esistono soli ∞^1 per una superficie (¹), lo $S(\nu)$ è almeno un $S_{\nu+2}$: in tal caso lo $S(\nu-1)$ è uno $S_{\nu+1}$ (se $\nu > 2$; per $\nu = 2$ si ha $S(1) = S_2$).

Il nostro problema ci porta dunque a questa domanda:

Quand'è che la quadrica delle direzioni uguali nello S_r all'infinito di S_{r+1} contiene ∞^2 $S_{\nu+1}$ e in tal posizione che quelli infinitamente vicini ad uno di essi passano per uno S_ν?

Applicando al nostro caso formole note (²) nell'ipotesi che la quadrica di S_r non sia specializzata, si vede che ciò è possibile solo se $r > 2\nu + 4$ per $\nu > 2$, e se $r > 7$ per $\nu = 2$. Quindi:

In due spazi affini di dimensione $\leq 2\nu + 5$, *se l'affinità è generale, non esistono superficie applicabili di specie* ν (> 2).

Se $\nu = 2$ *non esistono superficie applicabili in due spazi affini di dimensione* ≤ 8.

(¹) Per le sviluppabili il problema si risolve subito: basta cercare le curve di una quadrica di S_r i cui S_ν osculatori appartengono alla quadrica stessa; si trova subito che dev'essere $r \geq 2\nu + 2$. Del resto, dal punto di vista dell'applicabilità, le sviluppabili costituiscono un caso banale il cui interesse è minimo.

(²) Bertini, *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi* (Pisa, Spoerri 1907), pag. 131, nn. 17 e 18.

Se poi l'affinità è specializzata h volte, la superficie si compone di ∞^1 curve giacenti in S_h paralleli (passanti per lo S_{h-1} vertice della quadrica): le curve sezioni degli S_h con gli S_{r-h+1} ad essi normali, hanno i loro S_ν osculatori uguali ai corrispondenti: quindi gli $S_{\nu-1}$ all'infinito appartengono alla quadrica non degenere dello S_{r-h} all'infinito degli S_{r-h+1}. Di qua si ha la limitazione $h < 3$.

Matematica. — *I moti relativi nel calcolo assoluto.* Nota di C. Burali-Forti, presentata dal Corrispondente R. Marcolongo.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Sull'estendibilità del teorema di reciprocità del prof. V. Volterra ad un conduttore elettrico a tre dimensioni, non omogeneo, anisotropo e sottoposto all'azione di un campo magnetico qualunque.* Nota di Orazio Lazzarino, presentata dal Corrispondente R. Marcolongo.

1. Fin dal 1882 il prof. Volterra (1), partendo dal teorema di Green generalizzato da Thomson e Tait, ha stabilito il seguente teorema di reciprocità: « Se in un conduttore a due o a tre dimensioni di cui la conducibilità varia con continuità da punto a punto si fa passare una corrente di intensità I da un punto A ad un punto B, e in due punti C e D si ha una differenza di potenziale, otterremo la stessa differenza fra i potenziali dei punti A e B quando si faccia entrare da C e uscire da D la stessa corrente di intensità I ».

Questo interessante teorema ebbe nello stesso anno la conferma sperimentale dalle esperienze fatte in proposito dal prof. G. Poloni (2).

Nel 1915, in seguito alle ricerche del prof. O. M. Corbino (3) sul movimento della elettricità in una lamina metallica *sottoposta all'azione di un campo magnetico*, il prof. Volterra estese il suo teorema al caso di una lamina conduttrice isotropa, piana o curva, omogenea o non omogenea, di-

(1) Vito Volterra, *Sopra una legge di reciprocità nella distribuzione delle temperature e delle correnti galvaniche costanti in un corpo qualunque*, Nuovo Cimento, ser. III, vol. XI, anno 1882, pag. 188.

(2) G. Poloni, *A proposito della Nota del prof. V. Volterra sulla reciprocità delle correnti e delle temperature*, Nuovo Cimento, ser. III, vol. XII, anno 1882, pag. 58.

(3) O. M. Corbino, *Il movimento della elettricità in una lamina metallica sottoposta all'azione di un campo magnetico*, Rendic. della R. Accad. dei Lincei, ser. V, vol. XXIV, 1° sem. 1915, pag. 213.

sposta secondo una superficie di livello di un campo magnetico uniforme o non uniforme, munito di quattro elettrodi puntiformi, o di area finita e resistenza trascurabile, inseriti nell'interno o al contorno della lamina [1].

Anche sotto questa forma il teorema fu pienamente confermato dai risultati sperimentali ottenuti dal dott. G. Tasca Bordonaro [2] e dai professori O M. Corbino e G. C. Trabacchi [3].

Più recentemente la dott. E. Freda [4] è riuscita ad estendere, sotto certe condizioni, il detto teorema al caso di un conduttore a tre dimensioni, non omogeneo, anisotropo, fornito di quattro elettrodi e disposto comunque in un campo magnetico qualsiasi, eseguendo anche delle prove sperimentali che hanno dato risultati positivi.

In questa Nota io mi propongo di trovare, in modo nuovo, rapido e semplice, e nel caso più generale, sia le equazioni che individuano il movimento dell'elettricità, sia quelle che dimostrano il detto teorema di reciprocità.

2. Supponendo, come nella teoria elettronica del Drude, che la corrente sia trasportata con meccanismo convettivo dagli ioni positivi e negativi liberamente vaganti in seno ai metalli, siano N_1, N_2 i numeri di ioni positivi e negativi per centimetro cubo; e il valore assoluto della carica elettrica comune per le due specie di ioni; P_1, P_2 due ioni generici di cui uno positivo e l'altro negativo; $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$ i vettori delle forze elettromotrici totali che sollecitano i detti ioni; $\mathbf{h}$ il vettore del campo magnetico; $\mathbf{F}$ il vettore della forza elettrica che supponiamo ammetta un potenziale φ. Allora la densità elettrica della corrente sarà espressa dal vettore

$$\mathbf{u} = e(N_1\, P_1' - N_2\, P_2') \tag{1}$$

dove P_1' e P_2', derivate di P_1 e P_2 rispetto al tempo, rappresentano rispettivamente le velocità degli ioni positivi e negativi.

Indicando con γ_1 e γ_2 le due omografie, funzioni del punto generico P, che caratterizzano le proprietà specifiche del conduttore, per la legge di *Ohm* relativa ai mezzi anisotropi si hanno le relazioni:

$$P_1' = e\gamma_1\, \mathbf{E}_1 \quad ; \quad P_2' = - e\gamma_2 \mathbf{E}_2 \tag{2}$$

(1) Vito Volterra, *Sulle correnti elettriche in una lamina metallica sotto l'azione di un campo magnetico*, Rend. della R. Accad. dei Lincei, serie V, vol. XXIV, 1° sem. 1915, pp. 220, 289, 378, 533.

(2) G. Tasca Bordonaro, *Su alcune conseguenze della teoria generale del fenomeno di Hall*, Rend. della R. Accad. dei Lincei, ser. V, vol. XXIV, 1° sem. 1915, pag. 336; *La verifica del principio di reciprocità di Volterra, nel caso generale*, Rend. della R. Accad. dei Lincei, ser. V, vol. XXIV, 1° sem. 1915, pag. 709.

(3) O. M. Corbino e G. C. Trabacchi, *Sulla resistenza elettrica di una lamina in un campo magnetico*, Rend. della R. Acc. dei Lincei, ser. V, vol. XXIV, 1° sem. 1915, pag. 806.

(4) Elena Freda, *Sopra un teorema di reciprocità relativo alla propagazione di correnti elettriche in un conduttore sottoposto all'azione di un campo magnetico*, Rend. della R. Acc. dei Lincei, ser. V, vol. XXV, 2° sem. 1916, pp. 28 e 60.

da cui, supposte γ_1 e γ_2 invertibili, si ricava

$$(2') \qquad e\,\mathbf{E}_1 = \gamma_1^{-1}\,P_1' \quad ; \quad e\,\mathbf{E}_2 = -\,\gamma_2^{-1}\,P_2' .$$

Si può ritenere che i coefficienti N_1 ed N_2 e le omografie γ_1 e γ_2 possano eventualmente dipendere dal campo magnetico $\mathbf{h}$, ma che non mutino al variare del senso del campo; ciò è conforme ai risultati sperimentali i quali inducono ad ammettere che le proprietà specifiche del conduttore siano alterate dall'azione del campo magnetico, ma che tali alterazioni non dipendano dal senso del campo.

D'altra parte, supposto il conduttore mantenuto a temperatura costante, la forza elettromotrice totale che sollecita ogni ione è data solamente dalla forza elettrica, dipendente dalla distribuzione dei potenziali, e dalla f. e. m. che si genera per il movimento dello ione nel campo magnetico, e quindi si può scrivere:

$$(3) \qquad \mathbf{E}_1 = \mathbf{F} + \mathbf{h} \wedge P_1' \quad ; \quad \mathbf{E}_2 = \mathbf{F} + \mathbf{h} \wedge P_2' .$$

Eliminando fra le (2′) e le (3) le forze elettromotrici, si ha:

$$(\gamma_1^{-1} - e\,\mathbf{h}\wedge)\,P_1' = e\,\mathbf{F} \quad ; \quad (\gamma_2^{-1} + e\,\mathbf{h}\wedge)\,P_2' = -\,e\,\mathbf{F} ,$$

onde, supposte invertibili queste due omografie,

$$P_1' = e(\gamma_1^{-1} - e\,\mathbf{h}\wedge)^{-1}\,\mathbf{F} \quad ; \quad P_2' = -\,e\,(\gamma_2^{-1} + e\,\mathbf{h}\wedge)^{-1}\,\mathbf{F} .$$

Ponendo per brevità:

$$(4) \qquad \alpha = (\gamma_1^{-1} - e\,\mathbf{h}\wedge)^{-1} \quad ; \quad \beta = (\gamma_2^{-1} + e\,\mathbf{h}\wedge)^{-1}$$

ed osservando che, per l'ipotesi fatta,

$$\mathbf{F} = -\,\mathrm{grad}\,\varphi$$

si ricavano le espressioni delle velocità P_1' e P_2' in funzione del potenziale, cioè:

$$(5) \qquad P_1' = -\,e\,\alpha\,\mathrm{grad}\,\varphi \quad ; \quad P_2' = e\,\beta\,\mathrm{grad}\,\varphi .$$

Sostituendo queste nella (1), si ha immediatamente la densità della corrente espressa per mezzo di φ:

$$(6) \qquad \mathbf{u} = -\,e^2(N_1\,\alpha\,\mathrm{grad}\,\varphi + N_2\,\beta\,\mathrm{grad}\,\varphi).$$

Inoltre, dalla condizione di continuità, cui deve soddisfare la corrente,

$$(7) \qquad \mathrm{div}\,\mathbf{u} = 0 ,$$

si ricava, mediante la (6), l'equazione differenziale cui deve soddisfare il potenziale φ.

Indicando, infine, con $\mathbf{n}$ un vettore unitario, normale alla superficie del conduttore in un suo punto qualunque e rivolto verso l'esterno, si ha evidentemente:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{n} = 0\,, \tag{8}$$

da cui si deduce per φ una condizione al contorno.

3. Stabilite così le relazioni tra la densità di corrente ed il potenziale, si dimostra facilmente il teorema di reciprocità del Volterra, che, *nella sua forma più generale*, può enunciarsi:

« In un conduttore elettrico a tre dimensioni, anisotropo, non omogeneo, « munito di quattro elettrodi A, B, C, D di resistenza trascurabile, man- « tenuto a temperatura costante e disposto comunque in un campo magne- « tico qualsiasi, la differenza di potenziale che si stabilisce tra C e D, al « passaggio di una corrente elettrica che entra per A ed esce per B, è « uguale alla differenza di potenziale che si stabilisce tra A e B quando, « col campo invertito, una corrente d'intensità eguale alla precedente entra « per C ed esce per D ».

Siano φ_1 e $\mathbf{u}_1$ il potenziale e la densità di corrente quando, col campo diretto, la corrente entra per A ed esce per B; φ_2 e $\mathbf{u}_2$ gli stessi elementi quando, col campo invertito, la corrente entra per C ed esce per D; σ il contorno completo del conduttore; S lo spazio, una o più volte connesso, racchiuso dalla superficie σ. Supponiamo che le funzioni φ_1 e φ_2 siano regolari in tutto lo spazio S e che il vettore normale $\mathbf{n}$ precedentemente considerato sia rivolto verso l'esterno di S.

Applicando il noto teorema della divergenza, si ha:

$$\int_\sigma \varphi_2\, \mathbf{u}_1 \times \mathbf{n}\,.\, d\sigma = \int_S \operatorname{div}(\varphi_2\, \mathbf{u}_1)\, dS$$

ossia

$$\int_\sigma \varphi_2\, \mathbf{u}_1 \times \mathbf{n}\,.\, d\sigma = \int_S (\varphi_2 \operatorname{div} \mathbf{u}_1 + \operatorname{grad} \varphi_2 \times \mathbf{u}_1)\, dS$$

e per la (7)

$$\int_\sigma \varphi_2\, \mathbf{u}_1 \times \mathbf{n}\,.\, d\sigma = \int_S \operatorname{grad} \varphi_1 \times \mathbf{u}_2\,.\, dS\,. \tag{9}$$

In modo analogo si ricava l'uguaglianza

$$\int_\sigma \varphi_1\, \mathbf{u}_2 \times \mathbf{n}\,.\, d\sigma = \int_S \operatorname{grad} \varphi_1 \times \mathbf{u}_2\,.\, dS\,, \tag{10}$$

e da (9) e (10) si ha subito, per differenza:

$$\int_\sigma (\varphi_2\, \mathbf{u}_1 - \varphi_1\, \mathbf{u}_2) \times \mathbf{n}\,.\, d\sigma = \int_S (\mathbf{u}_1 \times \operatorname{grad} \varphi_2 - \mathbf{u}_2 \times \operatorname{grad} \varphi_1)\, dS\,.$$

Sostituendo nel secondo membro di questa eguaglianza, al posto dei vettori $\mathbf{u}$, le corrispondenti espressioni date dalla (6) e indicando con α' e β' le omografie definite dalle (4) quando al posto di $\mathbf{h}$ si ponga $-\mathbf{h}$, cioè

$$(4') \qquad \alpha' = (\gamma_1^{-1} + e\,\mathbf{h}\wedge)^{-1} \quad , \quad \beta' = (\gamma_2^{-1} - e\,\mathbf{h}\wedge)^{-1} ,$$

risulta:

$$\int_\sigma (\varphi_2\,\mathbf{u}_1 - \varphi_1\,\mathbf{u}_2) \times \mathbf{n} \,.\, d\sigma =$$

$$= - e^2 \int_S \Big[N_1 (\alpha \operatorname{grad} \varphi_1 \times \operatorname{grad} \varphi_2 - \alpha' \operatorname{grad} \varphi_2 \times \operatorname{grad} \varphi_1) +$$

$$+ N_2 (\beta \operatorname{grad} \varphi_1 \times \operatorname{grad} \varphi_2 - \beta' \operatorname{grad} \varphi_2 \times \operatorname{grad} \varphi_1) \Big] dS$$

ossia, per il teorema di commutazione:

$$(11) \qquad \int_\sigma (\varphi_2\,\mathbf{u}_1 - \varphi_1\,\mathbf{u}_2) \times \mathbf{n} \,.\, d\sigma =$$

$$= - e^2 \int_S \Big[N_1 (\alpha - K\alpha') + N_2 (\beta - K\beta') \Big] \operatorname{grad} \varphi_1 \times \operatorname{grad} \varphi_2 \,.\, dS \,.$$

Dalla (11) segue che, se in ciascun punto del conduttore è soddisfatta la condizione

$$(12) \qquad N_1 (\alpha - K\alpha') + N_2 (\beta - K\beta') = 0$$

ossia, data l'arbitrarietà di N_1 ed N_2, sono soddisfatte le condizioni

$$(12') \qquad \alpha - K\alpha' = 0 \quad ; \quad \beta - K\beta' = 0$$

risulta:

$$(13) \qquad \int_\sigma (\varphi_2\,\mathbf{u}_1 - \varphi_1\,\mathbf{u}_2) \times \mathbf{n} \,.\, d\sigma = 0$$

eguaglianza perfettamente analoga a quella da cui il prof. Volterra ha dedotto il teorema di reciprocità per la lamina.

Ora, perchè le (12′) siano soddisfatte, qualunque sia il campo magnetico $\mathbf{h}$, è necessario e basta ammettere che in ogni punto del campo, per qualunque valore di $\mathbf{h}$, le omografie γ_1 e γ_2, che definiscono le proprietà specifiche del conduttore, siano *dilatazioni*, ossia che si abbia

$$(14) \qquad \gamma_1 - K\gamma_1 = 0 \qquad \gamma_2 - K\gamma_2 = 0 \,.$$

Ciò si dimostra molto facilmente, osservando che dalle (4) e (4′) si ha:

$$\alpha^{-1} = \gamma_1^{-1} - e\,\mathbf{h}\wedge \quad ; \quad \beta^{-1} = \gamma_2^{-1} + e\,\mathbf{h}\wedge$$
$$K\alpha'^{-1} = K\gamma_1^{-1} - e\,\mathbf{h}\wedge \quad ; \quad K\beta'^{-1} = K\gamma_2^{-1} + e\,\mathbf{h}\wedge$$

da cui, per differenza, si ricava:

$$(15) \qquad \alpha^{-1} - K\alpha'^{-1} = \gamma_1^{-1} - K\gamma_1^{-1} \quad ; \quad \beta^{-1} - K\beta'^{-1} = \gamma_2^{-1} - K\gamma_2^{-1} .$$

Ne segue che, se sono verificate le (14), i secondi membri delle (15) risultano nulli e da qui si trae subito che sono soddisfatte le (12').

Reciprocamente, se le (12') sono verificate, le (15) dimostrano che saranno pure verificate le (14).

Nel caso del campo magnetico nullo, cioè $\mathbf{h} = 0$, risulta:

$$\alpha = \alpha' = \gamma_1 \quad ; \quad \beta = \beta' = \gamma_2$$

e quindi le (12') si identificano con le (14).

Supposto dunque che per il conduttore in esame siano verificate le condizioni (14), che cioè le omografie che definiscono le proprietà specifiche del conduttore siano *dilatazioni*, basta scegliere convenientemente nella (13) il contorno completo σ perchè sia applicabile l'enunciato teorema di reciprocità.

Nel caso di quattro elettrodi A, B, C, D puntiformi, basta assumere come contorno completo σ la superficie del conduttore più quella di quattro piccole sfere (o porzioni di sfere se trattasi di elettrodi situati sulla superficie del conduttore) aventi i centri nei punti occupati dagli elettrodi.

Difatti, osservando che per la superficie libera ed isolata del conduttore si ha per la (8):

$$\mathbf{u}_1 \times \mathbf{n} = \mathbf{u}_2 \times \mathbf{n} = 0 ,$$

si vede facilmente, con un procedimento analogo a quello adoperato dal prof. Volterra per la lamina, che, facendo tendere a zero i raggi delle sfere, se l'intensità della corrente che attraversa il conduttore è la stessa col campo magnetico diretto e col campo invertito, dalla (13) si deduce l'eguaglianza

$$(16) \qquad \varphi_{1C} - \varphi_{1D} = \varphi_{2A} - \varphi_{2B}$$

che esprime il teorema di reciprocità. Occorre però ammettere che, detta d la distanza di un punto generico da un punto occupato da un elettrodo, le funzioni φ_1 e φ_2 siano in quest'ultimo punto finite o presentino un infinito di ordine inferiore a quello di $1 : d^2$.

Nel caso poi di quattro elettrodi non puntiformi ma di resistenza trascurabile, se sono a tre dimensioni e inseriti nella massa del conduttore, per dedurre la (16) basta assumere per σ la superficie del conduttore più quella che esso ha in comune con gli elettrodi; se invece sono laminari e al contorno si prende σ uguale alla sola superficie del conduttore.

4. Tra i casi, che si possono facilmente stabilire, per i quali sono verificate le (14), è particolarmente interessante quello di un conduttore iso-

tropo che, sottoposto all'azione di un campo magnetico, acquisti una temporanea anisotropia solo per effetto del campo.

Per vedere come in tal caso le omografie γ_1 e γ_2 che caratterizzano le proprietà specifiche del conduttore siano effettivamente *dilatazioni*, consideriamo la superficie di livello del campo magnetico passante per un punto P qualunque del conduttore ed un sistema unitario, ortogonale, destrorso di tre vettori $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, avente il piano $\mathbf{ij}$ tangente in P alla detta superficie di livello. Poichè, per evidenti ragioni di simmetria, tutte le direzioni uscenti da P ed appartenenti al piano $\mathbf{ij}$ sono equivalenti dal punto di vista elettromagnetico, si conclude che le velocità degli ioni e le rispettive forze elettromotrici devono essere complanari con la forza magnetica, cioè

$$\mathrm{P}_1' \wedge \mathbf{E}_1 \times \mathbf{k} = 0 \qquad \mathrm{P}_2' \wedge \mathbf{E}_2 \times \mathbf{k} = 0$$

essendo evidentemente il vettore $\mathbf{h}$ parallelo a $\mathbf{k}$.

Di qui si trae facilmente che le velocità P_1' e P_2' degli ioni positivi e negativi possono scriversi sotto la forma:

$$\begin{aligned}\mathrm{P}_1' &= e(a_1\, \mathbf{E}_1 \times \mathbf{i} \,.\, \mathbf{i} + a_1\, \mathbf{E}_1 \times \mathbf{j} \,.\, \mathbf{j} + b_1\, \mathbf{E}_1 \times \mathbf{k} \,.\, \mathbf{k})\\ \mathrm{P}_2' &= e(a_2\, \mathbf{E}_2 \times \mathbf{i} \,.\, \mathbf{i} + a_2\, \mathbf{E}_2 \times \mathbf{j} \,.\, \mathbf{j} + b_2\, \mathbf{E}_2 \times \mathbf{k} \,.\, \mathbf{k})\end{aligned}$$

dove a_1, a_2, b_1, b_2 sono delle quantità reali.

Tenendo presenti le (2), si vede immediatamente che le omografie γ_1 e γ_2 sono in tal caso definite dalle seguenti uguaglianze [1]:

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} a_1 \mathbf{i} \,,& a_1 \mathbf{j} \,,& b_1 \mathbf{k} \\ \mathbf{i} \,,& \mathbf{j} \,,& \mathbf{k} \end{pmatrix} \quad ; \quad \gamma_2 = \begin{pmatrix} a_2 \mathbf{i} \,,& a_2 \mathbf{j} \,,& b_2 \mathbf{k} \\ \mathbf{i} \,,& \mathbf{j} \,,& \mathbf{k} \end{pmatrix}$$

onde si conclude che le omografie γ_1 e γ_2 sono effettivamente *dilatazioni* aventi per *direzioni principali* quelle dei vettori $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ sopra considerati.

[1] Cfr. Burali-Forti et R. Marcolongo, *Analyse vectorielle générale*. T. I, p. 21, Pavia 1912.

Matematica. — *Generalizzazione del metodo di Borel per la sommazione delle serie.* Nota di GUSTAVO SANNIA [1], presentata dal Socio ENRICO D'OVIDIO.

1. Accanto ad ogni serie numerica

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots \tag{1}$$

consideriamo la serie di potenze

$$u(x) = u^{(0)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \frac{x^n}{n!} \tag{2}$$

e quelle che se ne deducono mediante derivazione o integrazione ripetuta, cioè

$$u^{(r)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_{n+r} \frac{x^n}{n!} \qquad (r \text{ intero}),$$

convenendo che sia

$$u_n = 0 \quad \text{per} \quad n < 0 .$$

Diremo che la serie (1) *è sommabile col metodo di Borel di ordine* r, e scriveremo *è sommabile* (B, r), se la (2) è una trascendente intera e l'integrale improprio

$$\int_0^{\infty} e^{-x} u^{(r)}(x)\, dx \tag{3}$$

è convergente. Allora diremo *somma* della (1) il valore di questo integrale aumentato di

$$U_{r-1} = u_0 + u_1 + \cdots + u_{r-1} .$$

2. Abbiamo così definita una successione (indefinita in due sensi) di metodi di sommazione

$$\ldots, (B, -2) , (B, -1) , (B, 0) , (B, 1) , (B, 2), \ldots \tag{4}$$

tutti analoghi a quello ben noto del Borel (o metodo *esponenziale*) che corrisponde al nostro metodo $(B, 0)$.

Ciascuno di essi è *più potente* del metodo classico di sommazione, poichè:

Ogni serie convergente con somma u *è anche sommabile* $(B . r)$ *qualunque sia* r, *e con ugual somma* (ma non viceversa).

[1] I risultati contenuti in questa Nota saranno dimostrati e sviluppati in una prossima Memoria.

Inoltre ciascuno dei metodi (4) è più potente di tutti i seguenti ed è meno potente di tutti i precedenti, poichè:

Ogni serie sommabile (B, r) *con somma* u *è anche sommabile* $(B, r-1)$ *e con ugual somma* (ma non viceversa).

Tutto ciò assicura che i metodi (4) non sono contradittorii, nè col metodo classico di sommazione, nè tra di loro, e rende inoltre legittima la seguente

Definizione. Diremo che una serie *è sommabile col metodo di Borel generalizzato*, e scriveremo *è sommabile* B_g, quando è sommabile con *qualcuno* dei metodi (4) (ed allora è sommabile con tutti i precedenti e con ugual somma); e diremo *somma* della serie quella somma che tal metodo le conferisce.

3. Evidentemente *il nuovo metodo* B_g *è molto più potente del metodo originario* $(B, 0)$ *del Borel.*

Ma il fatto più notevole, e che lo rende passibile di larghissima applicazione, è che *esso ammette tutto l'algoritmo delle serie assolutamente convergenti* [1], come risulta dai teoremi seguenti.

I. *Se delle due serie*

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots, \quad u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} + (u_n + k) + u_{n+1} + \cdots$$

una è sommabile (B, r), *tale è anche l'altra, e la somma della seconda è uguale a quella della prima aumentata di* k.

II. *Se delle due serie*

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots, \quad ku_0 + ku_1 + ku_2 + \cdots \qquad (k \neq 0)$$

una è sommabile (B, r), *tale è anche l'altra, e la somma della seconda è uguale a quella della prima moltiplicata per* k.

III. *Se le due serie*

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots, \quad v_0 + v_1 + v_2 + \cdots$$

sono sommabili (B, r) *e* (B, s) *ed hanno per somma* u *e* v *rispettivamente, la serie*

$$(u_0 + v_0) + (u_1 + v_1) + \cdots$$

è sommabile (B, r), *se* $r \geq s$, *ed ha per somma* $u + v$.

[1] Lo stesso non può dirsi del metodo $(B, 0)$ del Borel. Cfr. in proposito le nostre recenti Note: *Nuova trattazione del metodo di Borel per la sommazione delle serie* (Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino, vol. LII, 1916-1917, pag. 67); *Sul metodo di Borel per la sommazione delle serie* (questi Rendiconti, vol. XXVI, serie 5ª, 1° sem., fasc. 3°).

IV. *Se la serie* (1) *è sommabile* (B, r) *ed ha per somma* u, *la serie*

$$u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$$

è sommabile (B, $r - n$) *ed ha per somma* $u - (u_0 + \cdots + u_{n-1})$; *e viceversa.*

Corollario 1°. (Proprietà commutativa). — *Cambiando l'ordine di un numero finito di termini di una serie sommabile* (B, r), *essa non si altera, cioè si ha una serie che è pure sommabile* (B, r) *e con ugual somma.*

Corollario 2°. — *Inserendo in una serie sommabile* (B, r) *un numero finito* n *di termini, si ha una serie sommabile* (B, $r - n$), *la cui somma è uguale a quella della prima aumentata della somma dei termini inseriti; sopprimendo da una serie sommabile* (B, r) *un numero finito* n *di termini, si ha una serie sommabile* (B, $r + n$), *la cui somma è uguale a quella della prima diminuita della somma dei termini soppressi.*

Corollario 3° (Proprietà associativa). — *Se in una serie sommabile* (B, r) *si sostituisce a un numero finito* n *di termini la loro somma, si ha una serie sommabile* (B, $r - n + 1$) *avente ugual somma.*

Corollario 4° (Proprietà dissociativa). — *Se in una serie sommabile* (B, r) *si sostituisce un termine con* n *altri* (n *finito*) *dei quali esso sia la somma, si ha una serie sommabile* (B, $r - n - 1$) *avente ugual somma.*

V. *Se le due serie*

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots \quad , \quad v_0 + v_1 + v_2 + \cdots$$

sono sommabili (B, r) *e* (B, s) *ed hanno per somma* u *e* v *rispettivamente, la serie di Cauchy*

$$w_0 + w_1 + w_2 + \cdots ,$$

ove

$$w_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \cdots + u_n v_0 ,$$

è sommabile (B, t) *ed ha per somma* $w = uv$, *ove* t *vale* $r + s - 1$ *se* r *ed* s *non sono positivi, ed è uguale al non maggiore dei numeri* r *ed* s *in ogni altro caso.*

Tutti questi teoremi ci assicurano che, applicando a serie sommabili Bg le operazioni lecite sulle serie assolutamente convergenti, si hanno ancora serie sommabili Bg [1].

4. Il metodo Bg è, in certo senso, il metodo limite dei (B, r) per $r = -\infty$.

È naturale considerare anche il metodo limite dei (B, r) per $r = +\infty$.

[1] È solo vietato di applicare la proprietà commutativa *al di là di qualunque posto.*

che indicheremo con B*t*: una serie è *sommabile* B*t* quando è sommabile con uno dei metodi (4) e con tutti i seguenti [1].

Risulta facilmente dai teoremi del n. 3 che, applicando a serie sommabili B*t* le operazioni lecite sulle serie assolutamente convergenti, si hanno ancora serie sommabili B*t*: dunque: *anche il metodo* B*t* *ammette l'algoritmo delle serie assolutamente convergenti*.

Il metodo B*t* è meno potente di ciascuno dei metodi (4) evidentemente, e quindi è molto meno potente del metodo B*g*: tuttavia esso riesce a sommare tutte le serie convergenti e le serie *assolutamente sommabili* del Borel. Ciò mette ancor meglio in evidenza la grande potenza del metodo B*g*.

Fisica terrestre. — *Singolare precipitazione acquea osservata al Vesuvio*. Nota di C. CHISTONI ed A. MALLADRA, presentata dal Corrisp. MICHELE CANTONE.

Il giorno 26 aprile 1917 si discendeva dall'orlo del cratere vesuviano, ed arrivati al Caposaldo n. 23 della « Linea di livellazione geometrica di precisione Resina-Cratere » eseguita nel 1913 dall'Istituto Geografico Militare (m. 1154.75 sul mare) che sta infisso sulla Stazione superiore della Funicolare Cook [2] alle ore $11^h 32^m$ del Meridiano a 15° E da Greenwich, siamo stati sorpresi dalla neve, mentre pochi minuti prima splendeva il sole. Il vento soffiava moderatamente da NW e su di noi non mancava la nube di nebbia e di fumo proveniente dal cratere del Vesuvio.

Raccolta la neve su di una stoffa di lana molto pelosa (*loden*) ed esaminate le varie parti con una lente di ingrandimento, trovammo che la precipitazione era costituita da classiche stelle di neve esagonali, semplici e trasparenti; da nevischio assai piccolo (meno di un millimetro di diametro), e da corpuscoli di ghiaccio, faccettati ed angolosi, che non corrispondevano alla pioggia gelata, la quale, come è noto, assume forma sferica o pressochè sferica. Le dimensioni massime di questi corpuscoli, che avevano l'apparenza di particelle di ghiaccio infranto, erano da un quarto a mezzo millimetro.

La caduta contemporanea di queste tre forme di acqua solida è un fenomeno singolare, che va notato e che per noi torna nuovo; come nuova ci torna la caduta di minuzzoli di ghiaccio trasparenti dal cielo.

[1] E quindi (pel secondo teorema del n. 2) anche con tutti i precedenti. Perciò una tal serie l'abbiamo chiamata *totalmente sommabile* nella seconda Nota citata più innanzi.

[2] *R. Comm. Geod. Italiana. Livellazione geometrica di precisione Isola d'Ischia e Vesuvio* (Firenze, tipografia Barbèra, 1914). A. Malladra, *Sulle modificazioni del Vesuvio dopo il 1906 e la livellazione geometrica del vulcano* (Boll. della R. Società geogr. Italiana, dicembre, 1914).

Le particelle di acqua solida perduravano intatte per circa un quarto di minuto dalla loro caduta sul panno, e tale precipitazione durò per quasi quattro minuti.

Nelle goccioline di acqua dovute alla fusione di questi corpuscoli di ghiaccio faccettati e ad angoli vivi, non abbiamo osservato alcun nucleo solido interno e non ci è dato di potere assicurare se essi fossero costituiti da pura acqua, come di certo lo erano la neve ed il nevischio.

Non escludiamo quindi il caso che questi apparenti corpuscoli di ghiaccio potessero avere per nucleo un cristallino trasparente di qualche sale sublimato, solubilissimo nell'acqua, che dapprima rivestito di ghiaccio, si sia in seguito completamente disciolto nell'acqua di fusione.

Ripetiamo che per noi il fenomeno è nuovo e che speriamo che possa essere da noi o da altri meglio esaminato, se si presenterà in altra circostanza.

All'Osservatorio Vesuviano, il cui pozzetto barometrico è a 632 m. sul livello del mare, non si notò nè pioggia, nè neve. Il diagramma del barometrografo segnò in tale giorno all'Osservatorio Vesuviano una pressione di 710 mm. (media normale) alle ore undici; dopo di che si ebbe regolare diminuzione di pressione fino alle ore 15 (circa tre quarti di millimetro in totale); dopo tale ora la curva risale, con lievi ondulazioni, fino alle ore 23 (mm. 710,50).

Meteorologia. — *Correlazione tra la temperatura dell'Italia e dell'Egitto.* Nota di Filippo Eredia, presentata dal Socio E. Millosevich.

I fenomeni meteorologici non si presentano ovunque con le medesime particolarità: e sembra che vi siano delle regioni del globo, in cui periodi di temperatura e di precipitazioni si susseguono con intensità diversa, legati però da una certa dipendenza.

Edward Fry, esaminando i dati termometrici dell'estate 1911, segnalò che nell Europa occidentale le temperature si erano mantenute più elevate di quelle avutesi in Egitto, venendosi in tal modo ad avvalorare il fatto, altre volte constatato, che cioè al Cairo si erano osservate temperature più fredde che non a Londra; e ciò metteva maggiormente in rilievo l'esistenza di una connessione meteorologica tra l'Egitto e l'Inghilterra. L'esame delle temperature relative al periodo 1877-1910 pel Cairo (Abbassia) e per l'Inghilterra occidentale e paese di Galles, diede il coefficiente di correlazione $-0{,}427 \pm 0{,}096$. Craig, in una recente Nota [1], riprendendo la trattazione

[1] Craig I., *A See-Saw of temperature between England and Egypt.* Quarterly Journal of the R. Meteorological Society, vol. XLI, pag. 89. London, 1915.

dell' interessante argomento, si propone di analizzare con maggiore particolarità le dette relazioni e di determinare la posizione della linea correlativa zero; e l'oggetto finale della ricerca, aggiunge l'A., era, in pratica, quella di apportare una certa utilità alla previsione del tempo.

Craig considera, per diverse annate, le temperature relative ai quattro mesi tipici di ciascuna stagione, e i risultati dei calcoli vengono riuniti nella seguente tabella ove indichiamo con r i coefficienti di correlazione.

	Annate di osservazioni	Gennaio			Aprile			Luglio			Ottobre		
		Media temperatura	Deviazione media	r	Media temperatura	Deviazione media	r	Media temperatura	Deviazione media	r	Media temperatura	Deviazione media	r
Beirut	1879-1907	13.1	±1.10	+0.89	18.3	±0.78	+0.52	26.7	±0.65	+0.61	23.9	±0.90	+0.78
Tripoli . .	1892-1911	12.2	1.06	+0.40	18.2	1.03	+0.38	25.9	0.70	+0.32	23.4	1.11	+0.23
Atene	1870-1903	9.0	1.65	+0.67	15.8	1.46	+0.70	27.8	1.14	+0.38	19.9	1.24	+0.29
Odessa . . .	1870-1912	— 3.1	3.19	+0.12	8.7	1.46	+0.39	22.9	1.38	+0.28	11.4	1.92	+0.13
Roma	1870-1889	6.8	1.22	—0.32	13.7	0.81	—0.02	24.8	0.89	+0.01	16.2	1.41	—0.30
S. Fernando . .	1870-1906	11.2	1.13	—0.04	15.5	1.10	—0.50	23.8	0.94	—0.31	18.5	1.30	—0.22
Sud Francia	1871-1906	5.0	1.59	—0.14	12.2	[illegible]	—0.19	21.9	1.19	—0.34	13.4	1.54	—0.30
Vienna .	1870-1907	— 1.7	2.58	—0.19	9.5	1.70	—0.14	19.8	1.34	—0.05	9.8	1.74	—0.21
SW Inghilterra	1872-1911	6.1	1.51	—0.56	8.6	0.85	0.24	15.7	0.95	—0.19	11.0	1.13	—0.40
Basso Egitto .	1870-1912	13.0	1.01	—	19.3	1.18	—	26.9	0.69	—	23.2	0.93	—

I dati della Francia meridionale risultano dalla media delle osservazioni termometriche delle seguenti città: Lione, Tolosa, Marsiglia, Montpellier, Perpignano; e quelli di SW Inghilterra dalla media delle osservazioni di Falmouth, Plymonth e Pembroke.

L'A. inoltre rappresenta graficamente i coefficienti di correlazione + e —, di cui i primi mostrano come ad una deviazione positiva dalla temperatura normale di una stazione corrisponde una simile deviazione in un'altra, mentre i coefficienti negativi indicano deviazioni dissimili. Risulta chiaramente, aggiunge l'A., che delle regioni europee considerate, alcune presentano omonomia con l'Egitto relativamente alle deviazioni della temperatura media dalle rispettive normali, altre eteronomia. La linea di correlazione zero non passa molto lontano da Roma, va da SW a NE, ma presenta variazioni a seconda delle stagioni. Essa ha tendenza a spostarsi verso E e W in inverno, e verso S e N in estate. La presenza delle fluttuazioni così dimostrata, assume un interesse pratico, in quanto ci mostra che siamo lontani dall'avere deviazioni simultanee e che è da aspettarsi un certo numero di giorni acciocchè una data variazione verificatesi in Inghilterra possa manifestarsi nell'Egitto. Alla determinazione di tale intervallo di tempo può giungersi coll'esaminare le temperature diurne, come l'A. ha fatto per un periodo di due anni.

Si è già detto avanti che l'A. esamina, per l'Italia, solo i dati di Roma per un limitato periodo di anni: viene pertanto di pensare che una più ampia utilizzazione dello osservazioni italiane, avrebbe forse consentito di maggiormente determinare l'andamento delle diverse linee di uguale correlazione e specialmente della linea di correlazione zero attraverso la nostra penisola.

Scopo della presente Nota è adunque quello di completare l'interessante ricerca del Craig relativamente all'Italia, utilizzando un esteso e identico periodo di anni di osservazioni per tutte le località considerate. A tale intento, abbiamo preso in esame le osservazioni termometriche raccolte nelle seguenti città: Torino, Padova, Bologna, Firenze, Roma, Napoli, Palermo, pel periodo 1871-1910, e per un analogo periodo abbiamo considerato le osservazioni dell'Egitto, desumendo quest'ultime dalla citata pubblicazione del Craig.

Diamo nella tabella seguente il risultato dei calcoli relativi (indicando con r i coefficienti di correlazione) agli stessi quattro mesi esaminati dall'A.; avvertendo che per l'Egitto abbiamo ottenuto le seguenti temperature medie: gennaio 13,1, aprile 19,7, luglio 26,9, ottobre 23,1.

	GENNAIO			APRILE			LUGLIO			OTTOBRE		
	Media temperatura	Deviazione media	r	Media temperatura	Deviazione media	r	Media temperatura	Deviazione media	r	Media temperatura	Deviazione media	r
Torino	0.4	± 2.02	−0.084	11.8	± 1.14	−0.190	22.9	± 1.12	−0.019	12.3	± 1.27	− 0.370
Padova	1.5	1.88	+0.188	12 3	1.05	+0.080	23.5	1.12	+0.085	13.5	1.38	− 0 358
Bologna	1.7	1.85	0.000	12.7	1.09	+0.017	24.7	1.08	+0 192	14.5	1.39	− 0.264
Firenze	4.6	1.70	+0.120	13.2	1.09	+0.094	24.3	1.24	+0.037	15 0	1.54	− 0.349
Roma	6.6	1.32	+0.312	13 7	1.04	+0 286	24 7	1.05	+0 028	16.4	1.25	− 0.181
Napoli	8.1	1 41	+0.196	13.6	1.15	+0.305	24.0	1.06	+0.201	17.3	1.32	− 0 191
Palermo	10.2	1.16	+0.430	14.8	1.03	+0.443	24.4	0.88	+0.374	19.6	1.24	− 0 206

Comparando i dati di Roma da noi ottenuti con quelli di Craig, risulta una sensibile differenza in ottobre e in aprile, mentre in luglio si manifesta quasi una concordanza e in gennaio la divergenza sta nel segno ed è certamente dovuta a errore di stampa incorso nella pubblicazione inglese. Dai nostri dati risulta che la linea zero passa in gennaio per Bologna, si sposta in aprile alquanto al disopra di Bologna, in luglio è nelle vicinanze di Roma e in ottobre si trasporta a latitudini minori, verificandosi su tutta la penisola coefficienti negativi di correlazione.

Concludiamo adunque che la linea di correlazione zero presenta un andamento ben diverso da quello segnalato dal Craig, ed un'oscillazione nell'anno molto più ampia e tale da comprendere tutta la penisola.

Geologia. — *Di alcune alghe calcaree provenienti dall'isola di Malta.* Nota II della dott.ssa Caterina Samsonoff-Aruffo, presentata dal Socio De Stefani.

Il secondo esemplare, raccolto dal prof. De Stefani a Ta Bingemma in Malta nell'Elveziano superiore (*Upper coralline Limestone* di Murray) si presenta quasi sotto l'aspetto schistoso: il tallo forma numerose lamine sottili, sovrapposte le une alle altre e riunite da piccole striscie di sabbia cementata.

Queste lamine hanno circa 1 mm. ed anche meno di spessore e sono spesso leggermente ondulate; esse si adattano alle accidentalità del substrato e probabilmente avvolgono di frequente altri corpi organici, perchè nel nostro campione si trovano numerose cavità. Il calcare è bianco, piuttosto friabile. Non mancano le traccie del lavorio di organismi perforanti. Nei punti di frattura le lamine mostrano un tessuto denso ed omogeneo. Il tallo sembra sterile, soltanto in un punto ho trovato un piccolo cono con un poro all'apice. Ho trovato unita all'alga un briozoo ed una foraminifera.

Passando ora all'esame microscopico vediamo in sezione verticale che il tallo è formato da sottili croste sovrapposte; l'*ipotallo* ed il *peritallo* sono ben evidenti. L'ipotallo è più sviluppato del peritallo ed è formato di elementi piuttosto ampî, disposti in zone concentriche trasversali, caratteristiche per il gen. *Lithophyllum*.

Però la struttura tipica a ventaglio non è molto evidente (forse per la direzione poco buona in cui fu fatta la sezione) e soprattutto i setti trasversali delle cellule non si trovano che di rado allo stesso livello.

Le serie cellulari radiali sono più evidenti; esse proseguono diritte lungo la linea di Rosanoff che si trova nella parte mediana dell'ipotallo, si incurvano in giù verso il sustrato — dalla parte inferiore — ed in su — dalla parte superiore — per formare il peritallo. Il tessuto è piuttosto denso e regolare. Le cellule dell'ipotallo sono grandi, rettangolari, circa due volte più lunghe che larghe. Nei punti dove l'ipotallo è stato sezionato trasversalmente si osservano spesso delle cellule doppie del Pilger; qualche volta anzi più di due cellule possono fondersi insieme.

Il peritallo è assai meno sviluppato e forma delle esili striscie sovrastanti all'ipotallo; in alcuni punti esso sembra mancare del tutto; però qualche volta il peritallo è piuttosto sviluppato e presenta una leggera zonatura.

Nel peritallo le cellule sono più piccole e soprattutto più corte, quasi quadrate; la loro lunghezza è di poco superiore alla larghezza.

Il passaggio fra l'ipotallo ed il peritallo è molto netto ed evidente. Le cellule del peritallo sono spesso disposte in serie verticali; qualche volta anche i setti trasversali sono allo stesso livello, però manca l'aspetto a grata o reticolo; il tessuto è denso, compatto, scolorito e senza zone. Verso la periferia le cellule diventano spesso più piccole. Manca la sovrapposizione dell'ipotallo al peritallo: ogni lamella è individualizzata e formata inferiormente da una striscia piuttosto spessa di ipotallo e superiormente da una striscia più o meno sottile di peritallo.

Il tallo è sterile. Ho trovato talvolta sulla superficie del tallo una pellicola formata da 3-5 strati di grosse cellule, probabilmente appartenente ad una *Mastophora*; in un punto di questa pellicola ho visto un concettacolo.

L'esemplare, dunque, malgrado che sia sterile, deve essere riportato al gen. *Lithophyllum* per la struttura caratteristica a ventaglio del suo ipotallo.

Prendendo in esame le varie specie di questo genere troviamo una grande somiglianza fra la nostra pianta ed il *Lithophyllum lichenoides* Ellis. Ambo le specie sono caratterizzate da uno sviluppo assai grande dell'ipotallo, formato di cellule allungate, rettangolari, piuttosto grandi e da una considerevole riduzione del peritallo. Anche esternamente queste specie debbono somigliarsi assai, essendo rappresentate da talli crostiformi, sottili, spesso ondulati. Vi sono però anche delle differenze: nella nostra pianta la disposizione concentrica delle cellule a modo di ventaglio, per quanto evidente, non è così tipica e spiccata come nel *L. lichenoides* Ellis, secondo la descrizione della signora Lemoine (pag. 128) (1) e le figure molto dimostrative di Rosanoff (2).

Oltreciò nel *L. lichenoides* Ellis le cellule dell'ipotallo sono tre volte più lunghe che larghe, mentre nella nostra specie la lunghezza è soltanto doppia della larghezza. Il peritallo è maggiormente sviluppato nella nostra pianta e formato di cellule quadrate, mentre esse sono rettangolari nel *L. lichenoides* Ellis.

La nostra pianta si avvicinerebbe anche di più al *Lithophyllum Fosliei* Heydrich, appartenente alla seconda sezione del genere *Lithophillum*, soprattutto per la frequente disposizione delle cellule del peritallo allo stesso livello in piani orizzontali. Però vi sono fra le due forme anche delle differenze notevoli. Nella nostra specie mancano totalmente gli eterocisti, così frequenti e numerosi secondo Heydrich (Melob. 1897, pag. 59, fig. 1, e 1897 pag. 410) e Foslie (ma non osservati dalla Lemoine, come manca anche la sovrapposizione dell'ipotallo al peritallo (carattere assai importante secondo

(1) Madame Paul Lemoine, *Structure anatomique des Mélobésiées* (Annales de l'Institut Océanographique, tome II, fasc. 2, Monaco 1911).

(2) S. Rosanoff, *Recherches anatomiques sur les Mélobésiées* (Mém. Soc. sc. nat. Cherbourg, 1866, pp. 1-112).

la mia epinione): le cellule del peritallo sono quadrate o leggermente allungate nel senso radiale, mentre nel *L. Fosliei* Heydrich esse sono stirate tangenzialmente.

Non posso dunque riportare la specie di Malta a nessuna delle due specie alle quali si avvicina di più, e la considero una specie nuova. Propongo di chiamarla

Lithophyllum Destefanii.

Il terzo esemplare raccolto dal prof. De Stefani nel Calcare inferiore a Nullipore a Kala (Gozo) nell'Arcipelago di Malta pure nel Miocene medio Elveziano inferiore (*Lover coralline Limestone* di Murray), è formato da un impasto di croste e di brevissimi rami tubercolari intimamente uniti fra loro dalla massa calcarea fondamentale. Le croste sono piuttosto spesse (2-3 mm.) irregolari, ripiegate; in alcuni punti però presentano una certa stratificazione. La parte più voluminosa del tallo è rappresentata da numerose escrescenze tubercolari, molto brevi, arrotondate all'apice, che ricuoprono completamente la crosta. Queste ramificazioni sono formate da un tessuto bianco-avorio molto compatto; la loro superficie è liscia; qua e là ho trovato qualche piccolo poro. Non mancano i Briozoi. Il conglomerato di colore bianco giallognolo presenta poche cavità; esso è assai compatto: la sua superficie tubercolare rinverdisce sotto l'acqua in molti punti per la presenza di alghe viventi.

Passando ora all'esame microscopico di questa specie vediamo che il nostro preparato è formato da un impasto di frammenti di alga calcarea, sabbia cementata e pezzetti di conchiglie.

Fra questi frammenti se ne trova *uno*, che perfettamente coincide con il tipo dell'alga, descritto sopra, proveniente da Ta Bingemma. Esso è. cioè, crostato e formato di due tessuti: ipotallo e peritallo; l'ipotallo è molto più sviluppato e presenta nettamente le caratteristiche del tipo *Lithophyllum*; la struttura a ventaglio è assai evidente.

In molti punti i frammenti sono così piccoli, mal conservati o troppo spessi, da non potere trarre nessuna conclusione dal loro aspetto. In altri punti della preparazione si trovano dei frammenti più grandi e meglio conservati: essi sono a cellule molto piccole. L'*ipotallo* è poco sviluppato, ma pur sempre presente; esso è del tipo *Lithothamnium*, formato di poche serie di cellule che subito si inarcano per formare il peritallo. La distinzione fra i due tessuti è poco netta; si ha spesso la sovrapposizione dell'ipotallo al peritallo. Il *peritallo* è maggiormente sviluppato, molto compatto e regolare, formato di *pile cellulari verticali* evidentissime; le cellule sono molto piccole, i setti tangenziali poco evidenti. L'ipotallo è meno compatto, esso è formato di elementi leggermente più grandi e perciò è più chiaro. Perquanto scavato da numerose cavità (probabilmente dovute all'azione di orga-

nismi perforanti ed al modo di accrescimento dell'alga). Questo tallo mi sembrò sterile: almeno non ho trovato nella preparazione nessun concettacolo. Qualche volta le serie cellulari radiali (verticali) del peritallo sono *un poco ondulate*. Ho trovato sulla superficie del tallo una pellicola formata da due strati di cellule grandi, forse si tratta di una *Mastophora*.

In un punto della preparazione ho trovato un frammento di un ramo sezionato, che presenta una disposizione *a zone* evidentissima; le cellule sono rettangolari, più grandi che non nell'altra specie, però non abbastanza ben conservate per poterle misurare; le zone sono piuttosto ampie, specialmente quelle chiare, le scure sono strette.

Questa seconda specie, che si trova in prevalenza, si avvicina in modo notevole al *Lithothamnium compactum* Kjell., specie nordica, appartenente alla terza sezione di questo genere, secondo la classificazione della signora Lemoine.

In ambo le specie troviamo un ipotallo ridottissimo formato di poche serie di cellule che subito si inarcano per formare il peritallo. Il peritallo a sua volta è formato di cellule piccole disposte in *pile verticali* evidentissime; la differenza fra i due tessuti è poco netta. La nostra specie è sterile, perciò non è possibile il confronto fra gli organi di riproduzione. Vi sono però anche delle differenze fra la nostra ed il *L. compactum* Kjell: quest'ultimo è a forma di *crosta*, mentre la nostra pianta presenta delle brevissime ramificazioni tubercolari; però tanto Foslie (1894-95) quanto la signora Lemoine parlano di piccole excrescenze nel *L. compactum* Kjell.

Ad ogni modo vi è una grandissima somiglianza fra il nostro preparato in questione e la fig. 9 della tavola n. 6 nell'opera del Kjelmann [1] rappresentante una sezione del tallo del *L. compactum* Kjell. Studiando le alghe calcaree fossili, raccolte nel Museo geologico di Firenze, ho indicato [2], nello strato più alto del post-pliocene di Brindisi, un'alga che ho potuto riconoscere per il *Lithothamnium compactum* Kjell.; però ne ho fatto una forma nuova per alcune differenze che presenta dalle forme conosciute.

Ho spiegato la sua presenza nel post-pliocene di Brindisi con l'invasione delle specie nordiche nelle regioni più temperate durante la massima estensione glaciale.

Potrebbe darsi che invece di essere migrato dal nord il *Lithothamnium compactum* avesse avuto origine durante il post-pliocene da una forma vicina, preesistente durante il miocene medio nel Mediterraneo. Questa forma avrebbe variato durante il periodo glaciale adattandosi alle nuove condizioni di

(1) Kjelmann; *The Algae of the Arctic sea* (Kongel. Svenska Vet. Akademie Handl. Band XX, no 5. 344 pages, 31 planches, 1833).

(2) C. Samsonoff-Aruffo, *Sopra una nuova forma di Lithothamnium del post-pliocene di Brindisi* (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. XXV, serie 5ª, 2° sem., fasc. 12°).

esistenza ed avrebbe dato origine al *Lithothamnium compactum* Kjell., il quale col ritiro dei ghiacci sarebbe emigrato verso il nord. Così si spiegherebbe tanto la sua presenza nel post-pliocene di Brindisi, come la presenza di una forma ad esso molto vicina nel Miocene medio dell'Isola di Malta. Io farei dunque l'ipotesi che forse la pianta raccolta dal prof. De Stefani a Gozo sia la pianta-stipite del *Lithothamnium compactum* Kjell., ed abbia dato poi origine durante il post-pliocene alla forma da me studiata e proveniente da Brindisi.

Ad ogni modo con qualunque ipotesi si tenti di spiegare la sua presenza nel miocene medio di Malta, io considero la pianta raccolta dal prof. De Stefani a Gozo come una *forma nuova* sebbene vicinissima al *Lithothamnium compactum* Kjell. e propongo di chiamarla

Lithothamnium miocenum.

Il quarto campione da me studiato ed appartenente al miocene medio di Malta fu raccolto dal prof. De Stefani in Malta a Fomm-ir-rih o Bocca del vento, e precisamente nella marna gialla subito sotto il calcare a Nullipore dell'Elveziano inferiore (*Lover coralline Limestone* di Murray) e sopra le Argille di tipo Tortoniano.

La nostra alga incrosta internamente ed esternamente delle valve di *Pecten*; essa forma delle croste di qualche millimetro di spessore, munite alla loro superficie di tubercoli brevissimi arrotondati, da 3,4 mm. a 5,8 mm. di diametro. Spesso questi tubercoli vengono ricoperti da nuova crosta. In alcuni punti l'alga è incrostata da briozoi.

Nella preparazione microscopica possiamo distinguere due parti: un *nucleo centrale* formato da un impasto di cristalli di calcare, frammenti di alghe, piccole conchiglie e sabbia cementata ed una *porzione periferica*, formata da un tallo *crostiforme* libero. Occupiamoci prima di quest'ultimo. Il tallo crostiforme si presenta formato soprattutto da *una sola specie di tessuto* (il peritallo) compatto, uniforme ad elementi di mediocre grandezza e regolari. Nel tessuto si possono nettamente distinguere le zone di accrescimento, limitate da linee più scure; in alcuni pochi punti della preparazione si vede l'alternarsi di zone scure più strette e di zone chiare larghe. Però, in genere, la zonatura per quanto distinta è poco accennata; le zone hanno un'andamento molto irregolare; sono ripiegate, contorte, molto variabili nella loro estensione e nel loro spessore. Alle volte la zonatura sparisce completamente. Le dimensioni delle cellule sono assai uniformi e la loro forma è quadrata o quasi; questa poca variabilità nel volume delle cellule conferisce un aspetto molto omogeneo al tessuto. Il tallo è compatto, però in esso si trovano delle cavità e delle inclusioni eterogenee (sabbia cementata conchiglie ecc.). I concettacoli sono molto numerosi; essi variano poco

nelle loro dimensioni; sono generalmente due volte più lunghi che larghi ed in alcuni punti un po' più di due volte. La forma dei concettacoli è elittica con il pavimento ed il tetto quasi piani e paralleli fra loro ed i fianchi uniformemente arrotondati. I concettacoli sono generalmente raccolti in gruppi e disposti in piani sovrapposti. Il tetto è formato da uno strato di tessuto piuttosto spesso; al disopra del tetto il tessuto è qualche volta un po' lasso, contenente delle discontinuità Il tetto è poi ricoperto da poche file di ipotallo secondario, che si sovrappongono al peritallo più anziano e contribuiscono all'affondamento del concettacolo. La forma dei concettacoli sarebbe quella del gen. *Lithothamnium*; però non ho potuto trovare i canalicoli d'uscita delle spore. Non sempre il tetto del concettacolo viene ricoperto dall'ipotallo che si sovrappone; qualche volta lo ricuopre il solo peritallo. Come abbiamo visto il nostro tallo crostiforme si distingue per una struttura uniforme, che per la sua semplicità si avvicinerebbe al gen. *Archaelithothamnium*; i concettacoli e l'ipotallo sono di un *Lithothamnium*, probabilmente si tratta di una specie nuova.

Nel nucleo centrale della preparazione troviamo diversi *rami* di alghe, sezionati trasversalmente. Il tessuto di questi rami presenta numerose cavità e lacune; esso è poco compatto ed è formato di elementi cellulari piuttosto grandi, disposti in serie radiali; però non manca qua e là l'accenno alla struttura zonata. Non ho potuto distinguere che una specie di tessuto, forse questo è dovuto alla cattiva conservazione del tallo. La struttura dei rami è più o meno eccentrica.

Il tessuto di questi rami non è abbastanza ben conservato per potere misurare le dimensioni delle cellule col micrometro oculare; esse sono poco uniformi per la loro forma e per la loro grandezza; possono essere quadrate o leggermente allungate nel senso radiale, e rettangolari. Mancano gli eterocisti e le cellule doppie; le file cellulari sono spesso arcuate all'infuori.

Questi rami sono fertili: ho trovato nel tallo di due rami dei concettacoli elittici. In media questi concettacoli sono due volte più lunghi che larghi, ma i loro diametri sono piuttosto variabili. Il pavimento ed il soffitto sono piani, il tetto è formato da una sottile striscia di tessuto e malgrado che i concettacoli sieno affondati, al disopra del tetto si trova spesso una cavità a forma di fessura trasversale che corrisponde più o meno a tutta la superficie del tetto. I concettacoli sono vuoti o riempiti di cristalli di carbonato di calce. Mi pare di intravedere un porocanale.

Nella parte centrale della preparazione oltre a questi rami appartenenti probabilmente ad un *Lithothamnium*, si trova un grosso cristallo di carbonato di calce, raccolto da un tallo crostiforme. Alla formazione di questa crosta hanno contribuito diverse specie e probabilmente diversi generi di alghe calcaree.

Grossolanamente si potrebbero distinguere due forme: una ad elementi più piccoli che ricorda il tallo della parte periferica della preparazione, l'altra ad elementi più grandi che per questo carattere e per la sua struttura si avvicina ai rami trovati nella parte centrale della preparazione. Nel tallo ad elementi più piccoli ho potuto distinguere tanto l'ipotallo che il peritallo. L'ipotallo è formato di file cellulari che si innalzano obliquamente per formare il peritallo; il passaggio fra i due tessuti non è brusco per quanto dis tinto. Le cellule dell'ipotallo sono più grandi e soprattutto più lunghe che non quelle del peritallo. Il carattere dell'ipotallo è quello del gen. *Lithothamnium*. Nel tallo ad elementi più grandi troviamo una struttura molto irregolare ed una distinta disposizione a zone. Più che di zone si tratta di striscie di tessuto sovrapposte, accavallate, ripiegate ed ondulate. Il tallo contiene numerose cavità e lacune riempite di sabbia cementata. In sezione trasversale le cellule appaiono piuttosto voluminose, poligonali a pareti molto rinfrangenti.

Riassumendo dunque abbiamo trovato:

Specie	Località
Lithophyllum Destefanii sp. nov.	Ta Bingemma (Malta) Elveziano superiore e Kala (Gozo) (Elveziano inferiore).
Lithothamnium miocenum sp. nov.	Kala (Gozo) (Elveziano inferiore).
Lithothamnium intermedium Kjell.	„ „ „ „
Goniolithon Martellii Sam.	„ „ „ „
Lithothamnium sp.	Fomm-ir-Rih (Malta) Elveziano inferiore.
Archaeolithothamnium (?) sp.	Fomm-ir-Rih (Malta) Elveziano inferiore.

Da questa descrizione delle specie raccolte dal prof. De Stefani nelle Isole di Malta vediamo che in questa località nel miocene medio vi era una notevole varietà di specie ed anche di generi appartenenti alle *Corallinaceae* fossili non articolate.

Geologia. — *Le argille mioceniche ed il pliocene di San Marino.* Nota del dott. Bindo Nelli, presentata dal Socio Carlo De Stefani.

Il compianto prof. De Gasperi, che gloriosamente cadde combattendo per la Patria sul monte Maronia il 16 maggio 1916, raccolse nelle argille turchine di San Marino molti fossili che formano oggetto di un mio studio paleontologico di quei terreni, studio da pubblicarsi insieme con una carta geologica del De Gasperi. Le località indicate per questi giacimenti argillosi sono: E e NE di Casa Gessi; E di Casa della Riva, NE di Casa Moraccino, Ca' Melone, pressi di Monte Olivo, Monteolivo e Cimitero di San Marino.

Il primo che precisò l'età di questa formazione argillosa fu il Fuchs, il quale avendo visitato una località posta al piede occidentale del Monte Titano, trovò una perfetta corrispondenza con gli strati di Baden, Gainfahren, Neudorf e Pötzleinsdorf del secondo piano mediterraneo del Bacino di Vienna. In seguito il Trabucco dalla posizione delle marne sabbiose, delle marne e delle sabbie posanti sopra i calcari elveziani, dei quali io pure ebbi già occasione d'occuparmi, deduce anche in base ai fossili da lui raccolti in posto che questi terreni sono da riferirsi al Tortoniano.

Le specie da me determinate sono le seguenti:

Protula firma Seg., *Limopsis* (*Pectunculina*) *anomala* (Eichw.); *Ostrea edulis* L., *Pecten* (*Chlamys*) *Tauroperstriatus* Sacco, *Pecten* (*Flabellipecten*) *flabelliformis* Brocchi, *Pecten* (*Amussium*) *corneum* Sow., *Pecten Gentoni* Font., *Arca* (*Anadara*) *diluvii* Lam., *Pectunculus* (*Axinaea*) *cor* Lam (= P. violacescens Lam. et auct.), *Chama gryphoides* L., *Venus* (*Chamelaea*) *gallina* L., *Cytherea multilamella* Lam., *Cytherea* (*Callista*) *pedemontana* Lam., *Amiantis Gigas* Lam., *Corbula gibba* Olivi, *Dentalium inaequale* Bru., *Dentalium sexangulum* Schr., *Antale novemcostatum* (Lam.) var. *mutabilis* Dod., *Turritella tricarinata* (Brocchi), *Scalaria* (*Hirtoscala*) *elegans* Risso var. (aff. *Scalaria spinifera* Seg. var. *foliacea* Sow.). *Vermetus Deshayesi* (Mayer). *Tenagodes anguinus* var. *Ligustica* Della Camp., *Natica epiglottina* Lam., *Natica Josephinia* Risso, *Cerithium tuberculiferum* Cocconi, *Cerithium italicum* Mayer, *Cerithium nodosoplicatum* Hörn., *Chenopus Uttingerianus* (Risso), *Dorsanum* sp. n. (aff. *Dorsanum Haueri* (Micht.) var. *excellens*, var *scalata* Schaffer), *Nassa gigantula* (Bon.), *Nassa semistriata* Brocchi, *Nassa instabilis* Bell. e var. non striata), *Nassa* (*Hinia*) *reticulata* Lam. var., *Nassa* (*Niotha*) *Schönni* Hörnes et Auinger var., *Columbella* (*Anachis*) *corrugata* (Brocchi), *Murex* (*Hadriania*) *craticu-*

latus (Brocchi), *Clavatula Aradasi* Bell. var., *Clavatula turbinata* Bell., *Drillia pustulata* Brocchi.

Se si tiene conto anche delle specie citate dal Trabucco, che sono, come pare assai numerose, abbiamo in complesso una *facies* di mare poco profondo, di zona coralligena, ma non certamente di zona littorale, qual'è appunto la *facies tortoniana*. È indubbia la corrispondenza fra la fauna delle argille del Monte Titano con quelle di Monte Gibio nel Modenese, di Vigoleno, di Sant'Agata nel Tortonese, di Stazzano, dell'alta valle dell'Idice, dei Monti Livornesi, di Sogliano al Rubicone, di Benestare in Calabria. Fatta eccezione di poche, le più delle nostre specie non arrivano più in basso del Tortoniano ed alcune non furono trovate, almeno fino ad oggi, che in questo, quindi in base anche a criteri paleontologici non può esserci dubbio sulla perfetta corrispondenza di questi strati con quelli di Baden, Neudorf ecc. del Bacino di Vienna del 2° piano mediterraneo.

Debbo però notare che le sabbie che trovansi presso il Cimitero, nelle quali furono pure raccolti dal De Gasperi alcuni fossili, non possono unirsi ai depositi argillosi tortoniani, secondo, come pare, l'opinione del Trabucco e del Fuchs; poichè, per quanto non si abbiano che poche specie, pure mi sembrano sufficienti per farci ritenere questi depositi superiori come pliocenici.

Queste sabbie a *Nucule*, a *Lede* ed a *Corbule* mostrano difatti le seguenti specie: *Modiola intermedia* For., *Arca diluvii* Lam., *Nucula nucleus* L., *Leda pella* L., *Corbula gibba* Olivi, *Cardium echinatum* L., *Tellina elliptica* (Br.), *Gastrana fragilis* (L.), *Natica epiglottina* Lam.

Patologia vegetale. — *Intorno alla peronospora della canapa.* Nota del prof. VITTORIO PEGLION, presentata dal Socio G. CUBONI.

Le ripetute osservazioni intorno alla presenza ed al comportamento della peronospora della canapa, compiute durante un decennio all'incirca nelle floride coltivazioni del Ferrarese, confermano che, salvo casi eccezionali come quelli che segnalai qualche anno fa, questo parassita praticamente non presenta importanza alcuna. Tuttavia la notevole frequenza con cui esso si rinviene nella forma molto appariscente caratterizzata dalle fruttificazioni conidiali mi ha indotto a riprenderne lo studio, tanto più che il parassita essendosi notevolmente sviluppato in una piccola parcella di canepaio impiantato nell'orto sperimentale di questa Scuola Agraria era agevole seguirne le vicende.

Ho avvertito le prime macchie caratteristiche su piante che avevano già emesso il terzo ed il quarto palco di foglie: macchie relativamente ampie e non accompagnate da deformazione sulle foglie del primo nodo, circoscritte spesso ad una porzione longitudinale della fogliolina che s'incurva a falce nelle infezioni che si verificano nelle foglie dei nodi successivi. Estirpando

accuratamente le piantine che presentano tracce di peronospora sulle prime foglie e collocandole in ambiente molto umido e buio, dopo 24 ore si manifestano ampie efflorescenze di conidiofori anche sui palchi superiori di foglie: soltanto dopo parecchie ore l'area occupata dai conidiofori stessi accenna a clorotizzarsi ed imbrunire.

Mantenute invece in condizioni normali di sviluppo non accade mai di osservare queste copiose fruttificazioni del parassita su altre foglie che non siano quelle già palesemente infette.

Abbandonando per 3-4 giorni le piante nelle condizioni suddette di ambiente, nei tessuti peronosporati imbruniti ed in incipiente disorganizzazione, l'esame microscopico rivela la presenza di *oospore*, che, per i caratteri morfologici e le dimensioni corrispondono a quelle di cui segnalai la presenza nelle piantine di canapa soggiacenti a incappucciamento e peronospora; anche conservando in camera umida foglie peronosporate staccate, la formazione delle oospore avviene in brevissimo tempo sebbene in numero limitato.

Ma dove, anche in condizioni normali d'ambiente, vi ha regolare formazione di oospore si è nelle foglie cotiledonali che perdurano abbastanza lungamente: in tutte le piante in cui ho osservato macchie di peronospora nelle foglie di successiva evoluzione, l'esame microscopico degli avanzi cotiledonali ha rivelato la presenza di oospore oltrechè di una fitta efflorescenza di conidiofori.

Ciò induce a ritenere che l'infezione della piantina avvenga durante la fase germinale: se essa sia dovuta ad oospore disseminate nel terreno o se esse siano trasportate dalla canapuccia è difficile stabilire. Certo si è che il terreno investito a canepaio nell'orto della Scuola nella corrente primavera non era stato mai in passato assoggettato a tale coltivazione ed esso può considerarsi praticamente isolato dai canepai dei dintorni cioè dai presumibili focolai d'infezione.

Ho eseguito pertanto delle prove d'infezione su piantine di canapa appena germinate valendomi dei conidi: prescindendo per un momento dalle modalità secondo cui avviene la germinazione di questi organi, le prove d'infezione eseguite su numerose piantine allevate in vaso sono pienamente riescite: dopo 3-4 giorni dalla semina dei conidi, non pochi individui presentano i cotiledoni rivestiti su entrambe le pagine da una fitta efflorescenza bruna, formata dai conidiofori del parassita

La presenza di una papilla all'apice dei conidi, segnalata dal Massalongo, mi aveva fatto sorgere il dubbio che questo fungo fosse impropriamente collocato nel genere *Peronospora*: difatti seguendone la germinazione si constata che essi si comportano come veri *zoosporangi*. Per seguirne l'andamento, avendo delle piantine di canapa in germinazione sotto campana ho seminato i conidi su goccie d'acqua condensatesi sui cotiledoni e contemporaneamente ho fatto delle semine in goccie d'acqua distillata nelle con-

suete camere umide montate su portaoggetti di vetro. In entrambi i casi dopo un periodo di tempo variabile da una a due ore, si avverte un accenno di frammentazione del contenuto protoplasmatico, la papilla apicale scompare e bruscamente le zoospore ben differenziate ed agilmente moventisi entro la parete conidiale fuoriescono, insinuandosi attraverso il ristretto foro apertosi all'apice del conidio: ogni conidio dà generalmente origine a 3 zoospore, biciliate, agilissime che percorrono in tutti i sensi la massa limpida. Seguendone l'ulteriore comportamento nelle gocciole d'acqua disseminate sui cotiledoni, dopo un'ora o due dall'uscita esse si fissano, perdono le ciglia, assumono forma sferoidale differenziando una sottile parete, quindi sviluppano un tubo germinale indiviso o ramoso che striscia contro l'epidermide sino alla più prossima apertura stomatica.

La ramificazione dei conidiofori secondo il tipo dicotomico e la germinazione dei conidi papillati per zoospore ravvicinano questo parassita della canapa alla peronospora delle cucurbitacee: questa è stata staccata dal genere *Plasmopara* dal Berlese [1] che propose di raccoglierla assieme a *Pl. Celtidis* in un sottogenere, *Peronoplasmopara* (pro conidiophoris Peronospora; pro conidiis Plasmopara). Il Rostowzew [2] noncurando le precedenti osservazioni del Berlese creò il genere *Pseudoperonospora* per porre in rilievo le caratteristiche di detto fungo; ma come giustamente osserva il Clinton [3] nel suo esauriente studio sulla peronospora delle cucurbitacee, per la priorità di pubblicazione e per i ben definiti caratteri il sottogenere *Peronoplasmopara* del Berlese, da elevarsi a genere, merita la precedenza. Pertanto anche il parassita della canapa cessa dal far parte del genere *Peronospora* e va riferito al gen. *Peronoplasmopara*.

In base ai risultati forniti dallo studio della *Peronoplasmopara cannabina* (Otth.) Pegl. ritengo sia possibile completare le conoscenze intorno al ciclo biologico dell'affine *Per. Cubensis*, di cui non si conoscono le oospore. Forse ricercando tali organi di svernamento del parassita negli avanzi cotiledonari sarà possibile risolvere il problema.

(1) Berlese, *Monogr. Peron.* Riv. Pat. veg. 1900.
(2) Rostowzew, *Flora*, 92, 1903.
(3) Clinton, Conn. Agr. Exp. St. 1904.

Batteriologia. — *Contributo all'accertamento della spirochetosi umana* (1). Nota preventiva dei dott. A. Zironi e G. Capone, presentata dal Socio Marchiafava.

Scopo della presente Nota riassuntiva è di mettere in evidenza il fatto, ripetutamente da noi osservato, del reperto positivo dei parassiti nel sangue in casi di itteri spirochetici anche durante il periodo itterico.

È ammesso dalla maggioranza degli autori che la *sp. nodosa* si rinvenga con grande difficoltà nel sangue e scompaia dal circolo con l'inizio dell'ittero. Si accetta pure che il metodo più sensibile di diagnosi etiologica in casi di ittero infettivo epidemico sia dato dalla inoculazione intraperitoneale in cavia di qualche cm³ di sangue preso nel periodo preitterico. o di urina, a partire dal 12° o 15° giorno di malattia.

Alcune osservazioni da noi fatte ci permettono di affermare che anche in casi lievi di ittero (condizioni generali buone, apiressia. scarso o nullo risentimento del fegato e della milza, sistema linfatico normale) si possono trovare, parecchi giorni dopo l'inizio dell'ittero, spirocheti nel sangue.

Riportiamo in riassunto i casi osservati:

1) S. Ten. U. D. di a. 23 del .... fant. che, ammalato ...... il 20/4 è itterico dai primi di maggio, ha setticemia spirochetica dimostrabile con grande facilità al paraboloide e col metodo Burri il 5 maggio.

2) M. G. di a. 22 del ..... fant. Si rinvengono coi soliti metodi numerosi parassiti con tutti i caratteri delle spirochete di Ido e Inada 4 giorni dopo l'inizio dell'ittero e 12 giorni dopo l'inizio della malattia.

3) B. G. a. 31 ... fant. Si rinviene la spirocheta al paraboloide e col metodo Burri 2 giorni dopo l'inizio dell'ittero e 9 dall'inizio della malattia.

Non rientrano nella categoria surriferita. quantunque abbiano grandissima analogia per la facile dimostrazione del parassita nel sangue ad ittero in corso, i seguenti gravi ammalati:

4) A. G. operaio. proveniente da Monfalcone. Non è possibile raccogliere alcun dato anamnestico perchè l'i. versa in istato comatoso. L'ittero è spiccato, l'infermo è ipotermico. Il 7 aprile si raccoglie il materiale per l'esame. Si allestiscono preparati di sangue e di sedimento di urine alla Burri, ed in tutti si rinvengono rare spirochete. Il parassita, esile filamento con 2 o 3 larghe ondulazioni. ha lunghezza di 6-8 micron e spessore di 0.2. Si inoculano in una cavia 5 cm³ di sangue e in un'altra 5 di urina, entrambe

(1) Lavoro eseguito nel laboratorio bacteriologico militare di Muscoli, 8 maggio 1917.

in peritoneo. L'i. morì al mattino dell'8 e l'autopsia pose in evidenza ittero universale, lesioni emoragiche delle sierose e degli organi interni, degenerazione grassa del fegato. Nel sangue del cadavere, nell'urina, e nella bile si rinvennero numerose spirochete morfologicamente identiche a quelle osservate nel vivo. 5 cm³ di sangue del cadavere furono inoculati in peritoneo ad una cavia. Il 15 aprile si esaminano gli animali e si rinvengono spirochete solo nella cavia inoculata con sangue di cadavere. Il 23 aprile, con un nuovo esame si rinvengono, in tutti e due gli animali inoculati con sangue spirochete, identiche per forma e per grandezza a quelle descritte nel sangue del paziente.

5) Z. G. a. 33 ... fant. Ammalò a Monfalcone il 26/4. L'ammalato versa in gravi condizioni. Psiche obnubilata, sensorio ottuso, ittero spiccato. Linfoglandole normali. Catarro bronchiale diffuso. Nulla di notevole al cuore. Addome leggermente tumido, dolente. Fegato debordante e dolente: milza grossa e dura. Tremore degli arti nei movimenti. Kernig accennato. Riflessi cutanei e tendinei esagerati. Pupille torpide alla luce. Si praticano gli esami l'8 maggio e si rinviene la spirocheta specifica al paraboloide e col metodo Burri nel sangue e nel liquido cefalo-rachideo. Si inocula una cavia in peritoneo.

In base alla nostra esperienza dobbiamo quindi concludere che è riuscita con facilità la dimostrazione della spirocheta anche nel periodo dell'ittero nella totalità dei casi da noi osservati.

L'iniezione a cavia, data da quasi tutti gli autori come il metodo più sicuro di diagnosi dell'ittero spirochetico, in due nostri casi si dimostrò malfida. Ricordiamo il caso 5°. Le cavie inoculate col sangue del vivo e del cadavere il giorno 7 e il giorno 9 vivono tuttora e non sono mai state itteriche.

6) M. A. operaio proveniente da Monfalcone. Ammalò con ittero il 25 marzo, il 30 si potè prelevare il materiale. L'esame del sedimento delle urine, ottenuto con centrifugazione di mezz'ora e colorato con fucsina fenica, previo mordenzamento tannico, svelò rare spirochete. Si inocularono 5 cm³ di urina fresca in cavia, si ripetè l'esame del sedimento dell'urina il 4 aprile e si osservò un numero di spirochete maggiore della prima volta. Il 7 si poterono inoculare 5 cm³ di sangue del paziente a una cavia. L'animale dopo 9 giorni pareva abbattuto. Se ne guardò il sangue preparato con inchiostro di china ed all'ultramicroscopio, ma nulla si potè mettere in evidenza. Il 6 maggio nuovamente si esaminarono le cavie: quella inoculata con sangue aveva in circolo rare spirochete coi caratteri morfologici dei parassiti osservati nell'urina del paziente. Con l'esame in campo oscuro si videro in forma di esili filamenti dotati di vivace movimento oscillatorio. Nulla si ebbe dagli esami della cavia inoculata con orina.

Concludendo:

1) Anche nel periodo itterico di casi lievi di spirochetosi è facile la dimostrazione del parassita nel sangue degli infermi.

2) L'iniezione all'animale suscettibile (cavia) può far rilevare la presenza di spirochete nel sangue senza che si determini alcun quadro morboso.

RELAZIONI DI COMMISSIONI

Il Socio Nasini, relatore, a nome anche del Socio Volterra, legge la seguente Relazione sulla Memoria presentata dal dott. U. Pratolongo: *Studi di Chimica cinetica*.

Nella Memoria presentata dal dott. Pratolongo si tratta un interessante capitolo della chimica cinetica. L'A., dopo avere notato che le condizioni di reagibilità della molecola non possono essere studiate completamente colle attuali dottrine termodinamiche e cinetiche, ma bensì ricercate nel campo della variabilità interna delle molecole, mette in evidenza che la soluzione del problema venne intraveduta da R. Marcelin, il quale, in molte pubblicazioni, riassunte poi nella « Tesi » stampata nel 1915, emise e sviluppò il concetto di una energia critica molecolare connessa colla reagibilità molecolare. E poichè il Marcelin si limitò ad applicare ad un piccolo dominio del campo chimico cinetico il valore delle sue deduzioni, l'A. si propone in questa Memoria di dare a tale concetto uno sviluppo più esteso e profondo. Questo è appunto lo scopo del lavoro presentato, nel quale l'A., con ampio sviluppo matematico, perviene al calcolo della energia critica relativa in determinate trasformazioni chimiche, e fornisce diversi esempî tratti da reazioni già studiate da altri, e tenta, in base ai concetti svolti, la spiegazione di alcuni fenomeni, come p. es. il rapporto fra l'attività chimica e lo stato nascente. I fenomeni che vengono principalmente studiati dall'A. sono quelli catalitici, i fotochimici, e le influenze mediali, che vengono tutti esaminati da un punto di vista unico.

La Commissione ritiene che la Memoria del dott. Pratolongo, che illustra e sviluppa con profondità di concetti e con largo corredo matematico un capitolo importante e nuovo della meccanica chimica, meriterebbe di essere inserita integralmente negli Atti della nostra Accademia: ma, tenuto conto delle circostanze presenti, e del fatto che la Memoria stessa può essere stampata per intero e con maggiore rapidità in riviste scientifiche italiane e francesi, è di avviso che il dott. Pratolongo potrebbe intanto presentare un sunto della sua Memoria da pubblicarsi nei nostri Rendiconti.

Le conclusioni della Commissione esaminatrice, messe ai voti dal Presidente, sono approvate dalla Classe.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario MILLOSEVICH presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando le seguenti: *Su di un derivatore polare da servire nella radiotelegrafia*, del Corrisp. PASCAL; *Materiali per una revisione dei Diploda oniscomorpha*, del Corrisp. SILVESTRI; *Principes de Géometrie analytique*, del Socio straniero DARBOUX. Lo stesso Segretario fa omaggio di un suo lavoro intitolato: *Il sorgere eliaco di Sirio con qualche accenno di paleo-cronologia egizia*, dando ampia notizia del contenuto e dello scopo di questo suo studio. Infine fa menzione di alcune altre pubblicazioni: *Bibliografia dell'aria* di G. BOFFITO e P. NICCOLARI; *Applicazioni della geologia. XXIII: Utilizzazione del fiume Aniene e bonifica idraulica della sua valle*, di G. DE ANGELIS D'OSSAT; e di una raccolta di Memorie di botanica offerte dall'autore prof. A. BÉGUINOT, direttore del R. Istituto botanico di Padova.

Il Socio VOLTERRA presenta le seguenti pubblicazioni del prof. E. LEBON: *Sur la construction de la nouvelle Table de base 30 030 des diviseurs des nombres inférieurs a 90 1800 900 — Sur une nouvelle Table de diviseurs des nombres*.

Il Socio REINA, a nome anche dei collaboratori ingegneri CORTELLINI e DUCCI, offre una copia dell'opera: *Livellazione degli antichi acquedotti romani*, della quale discorre, descrivendo i lavori compiuti e i risultati ottenuti.

COMUNICAZIONI DIVERSE

Il Presidente RÒITI, nel dichiarare chiuso l'anno accademico per le sedute delle Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali, rivolge un cordiale saluto ai Colleghi e pronuncia patriottiche parole, augurando che la piena vittoria venga presto a coronare gli eroici sforzi dei nostri combattenti e compensi i mirabili sagrifici del nostro paese. Rileva come il continuo progredire degli studî positivi fra noi, non miri alla preminenza della forza bruta, come vogliono i nostri nemici, ma favorisca l'intenso svolgersi delle energie latenti del nostro paese, delle quali i giovani danno oggi splendidi esempi. È questo un fatto che riempie di gioia, di soddisfazione e di fierezza i maestri, i quali veggono rivivere nei loro allievi gli antichi entusiasmi giovanili.

Il Presidente Ròiti chiude il suo discorso tra gli applausi e le unanimi approvazioni dei presenti, proponendo l'invio del seguente telegramma di ossequio a S. M. il Re, alto Patrono dell'Accademia.

Eccellenza Generale Brusati, Aiutante di campo generale Sua Maestà

Zona di Guerra.

Vostra Maestà in questo giorno onorava di Sua presenza la Reale Accademia dei Lincei quale Alto-patrono. La Classe di Scienze fisiche e matematiche oggi nell'ultima Sua Seduta annuale presenta rispettosi omaggi a Vostra Maestà e s'augura che la piena vittoria per i nostri alti ideali ridìa all'Accademia l'ambìto onore di presto ospitare il suo Alto Patrono.

Presidente Ròiti.

E. M.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 3 giugno 1917.

Amodeo F. — Aritmetica ed algebra, volumi I-II, parte I, parte 2.ª Napoli, 1910-15. 8°, pp. I-VIII 719; I-XII 381.

Bèguinot A. — I distretti floristici della regione littoranea dei territori Circumadriatici (Estr. dalla « Rivista Geografica italiana », vol. XXIII, pp. 1-44). Firenze, 1916. 8°.

Béguinot A. — L'orto e l'Istituto botanico della R. Università di Padova. Padova, 1916. 8°, pp. 1-29.

Bèguinot A. — La flora delle mura e delle vie di Padova (Estr. dalla « Rivista Malpighia », vol. XXIV, pag. 413; XXV, pag. 61; XXVII, pp. 244, 439, 547). Catania, 1911-16. 8°.

Béguinot A. — Le avventizie esotiche della flora italiana e le leggi che ne regolano l'introduzione (Estr. dal « Nuovo Giornale botanico italiano », vol. XXIII, pp. 1-100). Firenze, 1916. 8°.

Béguinot A. — Ricerche culturali sulle variazioni delle piante (Estr. dal « Bollettino di Studi ed informazioni del R. Orto botanico di Palermo », vol. III, pp. 1-16). Palermo, 1916. 8°.

Béguinot A. — Sopra alcune deformazioni tuberoidi. Sulle radici del comune girasole (*Helianthus Ansucus* L.) e sulle cause delle stesse (Estr. dagli « Atti e Memorie », vol. XXXII, pp. 227-242). Padova, 1916. 8°.

Béguinot A. — Sulla genetica di alcune entità del ciclo di *Solanum nigrum* L. (Estr. dagli « Atti del Reale Istituto veneto di Scienze, lettere ed arti », vol. LXXV, pp. 538-556). Venezia, 1916. 8°.

Béguinot A. — Studi sul genere *Bellis* L. con speciale riguardo alle specie europeo-africane (Estr. dagli « Atti dell'Accademia Veneto-Trentino-Istriana », vol. IX, 1916, pp. 1-64). Padova, 1916. 8°.

Béguinot A. — Un manipolo di piante raccolte nella penisola Balcanica (Estr. dal « Bullettino, della Soc. botanica italiana di Firenze », pp. 1-3). Firenze, 1916. 8°.

Boffito Giuseppe — Bibliografia dell'aria, ossia Repertorio bio-bibliografico italiano di Meteorologia e di Magnetismo terrestre. Firenze, 1916. 4°, pp. 1-152

Corbellini G. — Livellazione degli antichi acquedotti Romani (Estr. delle « Memorie della Società italiana delle Scienze detta dei XL », vol. XX, pp. 1-77). Roma, 1917. 4°.

Darboux G. — Principes de Géométrie analytique. Paris, 917. 8°, pp. I-VI, 1-519.

De Angelis d'Ossat G. — Applicazioni della Geologia, XXIII. Utilizzazione del fiume Aniene e bonifica idraulica della sua valle. Perugia, 1917. 8°, pp. 1-12.

Ducci G. — Livellazione degli antichi acquedotti Romani (Estr. delle « Memorie della Società italiana delle Scienze detta dei XL », vol. XX, pp. 1-77). Roma, 1917. 4°.

Durante D. — Contributo alla conoscenza biologica della *Tingris pyri* L (Estr. dal « Bollettino del Laboratorio di zoologia gener. e agrar. », vol. XI, pp. 282-290). Portici, 1917. 8°.

Lebon E. — Sur la construction de la nouvelle table de base 30030 des diviseurs des nombres inférieurs à 901 800 900 (Extr. de « Bulletin de la Société philomathique de Paris », t. X, pp. 1-12). Paris, 1917. 8°.

Lebon E. — Théorie des nombres — Sur une nouvelle Table de diviseurs des nombres (Extr. des « Comptes rendus de l'Académie des Sciences », t. 164, pp. 482-483). Paris, 1917. 4°.

Martinez G. — I moderni sistemi di ricezione radiotelegrafica (Estr. dal Giornale « L'Elettrotecnica », n. 15, pp. 1-7). Milano, 1917. 4°.

Mazza A. — Le avventizie esotiche della Flora italiana e le leggi che ne regolano l'introduzione e la naturalizzazione (Estr. dal « Nuovo Giornale botanico italiano », vol. XXIII, pp. 1-100). Firenze, 1916. 8°.

Millosevich E. — Il sorgere eliaco di Sirio con qualche accenno di paleocronologia egizia (Estr. dalle « Memorie del R. Osservatorio Astronomico al Collegio Romano », vol. VII, pp. 1-25). Roma, 1917. 4°.

Niccolari P. — Bibliografia dell'aria ossia Repertorio bio-bibliografico italiano di meteorologia o di magnetismo terrestre. Firenze, 1916. 4°, pp. 1-152.

Pascal E. — Su di un derivatore polare. Napoli, 1917. 8°, pp. 1-4.

Reina V. — Livellazione degli antichi acquedotti Romani (Estr. delle « Memorie della Società italiana delle Scienze detta dei XL », tomo XX, pp. 1-77). Roma, 1917. 4°.

Rendiconti delle esperienze e degli studi eseguiti nell'Istituto (Istituto idrotecnico di Stra). Vol. I, fasc. 2°. Venezia, 1917. 8°, pp. 1-55.

Silvestri F. — Materiali per una revisione dei *Diplopoda Oniscomorpha* (Estr. del « Bollettino del Laboratorio di Zoologia gen. e agraria », vol. XII, pp. 61-85). Portici, 1917. 8°.